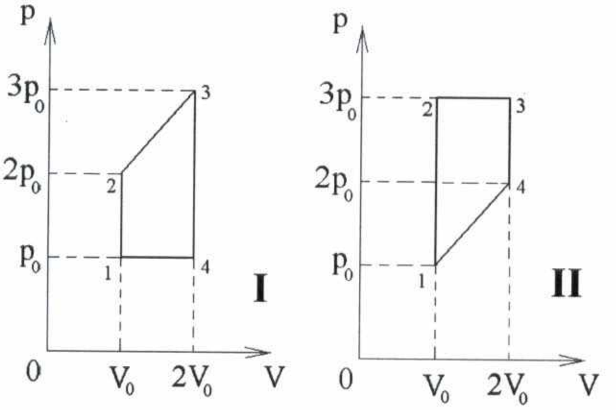
11 класс

1. На двух диаграммах **I** и **II** представлены два циклических процесса, описывающих работу двух тепловых машин, рабочим телом которых является гелий.



1) В каком случае КПД больше и во сколько раз?

2) Изменится ли КПД тепловой машины **I**, а если изменится, то во сколько раз, если гелий заменить

а) кислородом O_2, б) углекислым газом CO_2?

Газы считать идеальными.

Примечание: Внутренняя энергия идеального газа находится по формуле $U = \frac{i}{2}\nu RT$, где ν – число моль, *T* – абсолютная температура, *i* – число степеней свободы молекулы, *R* = 8,31 Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная. Для одноатомной молекулы *i* = 3, для двухатомной молекулы *i* = 5, для трех- и более атомной молекулы *i* = 6.

Решение

КПД тепловой машины равен $\eta = \frac{A}{Q_н}$, где A – работа за цикл, $Q_н$ – полученное тепло от нагревателя.

Работа за цикл, изображенного в системе координат p(V), можно найти как площадь цикла.

В случае **I и II** работа будет одинаковой, так как площади фигур одинаковы:

$$A_I = A_{II} = \frac{1}{2}(p_0 + 2p_0)V_0 = \frac{3}{2}p_0V_0$$

Тепло получается газом на участках 1-2-3 в двух случаях

$$Q_{нI} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3} = \frac{i}{2}(6p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{1}{2}(2p_0 + 3p_0)V_0 = \frac{p_0V_0}{2}(5i+5)$$

$$Q_{нII} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3} = \frac{i}{2}(6p_0V_0 - p_0V_0) + 3p_0V_0 = \frac{p_0V_0}{2}(5i+6)$$

$\eta_I = \frac{A_I}{Q_{нI}} = \frac{3}{5i+5}$, $\eta_{II} = \frac{A_{II}}{Q_{нII}} = \frac{3}{5i+6}$. Видно, что $\eta_I > \eta_2$.

1) Таким образом, можно найти отношение $\frac{\eta_I}{\eta_{II}} = \frac{5i+6}{5i+5}$. Гелий – одноатомный газ, поэтому $i = 3$.

$\eta_I = \frac{3}{15+5} = \frac{3}{20} = 0,15$, $\eta_{II} = \frac{3}{15+6} = \frac{3}{21} = 0,143$

$$\frac{\eta_I}{\eta_{II}} = \frac{0,15}{0,143} = 1,05$$

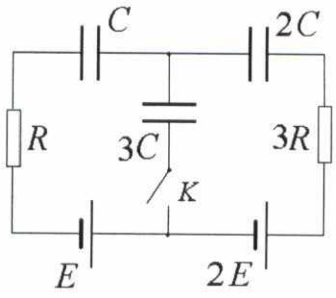
2а) $\eta_I(O_2) = \dfrac{3}{5(5+1)} = \dfrac{3}{30} = 0,1$, так как кислород двухатомный и $i = 5$.

КПД уменьшился в 1,5 раза

2б) $\eta_I(CO_2) = \dfrac{3}{5(6+1)} = \dfrac{3}{35} = 0,0857$, так как углекислый газ трехатомный и $i = 6$.

КПД уменьшился в 1,75 раза.

	Критерии оценки	Балл
1	Получено выражение для количества тепла, подводимого в первом цикле	3
2	Получено выражение для количества тепла, подводимого во втором цикле	3
3	Показано, что работа в циклах одинакова и найдено отношение к.п.д. циклов	8
4	Вычислено отношение к.п.д. для одноатомного газа	2
5	Вычислено отношение к.п.д. для двухатомного газа	2
6	Вычислено отношение к.п.д. для трехатомного газа	2

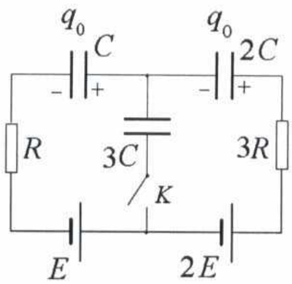


2. В электрическую схему, состоящую из трех незаряженных конденсаторов C, $2C$, $3C$ и двух резисторов R и $3R$, подключили два источника с ЭДС E и $2E$ (см. рисунок). Когда переходные процессы в схеме завершились, замкнули ключ К, после чего установилось новое установившееся состояние.

1) Во сколько раз отличаются величины работ, совершенных каждым источником после замыкания ключа К?

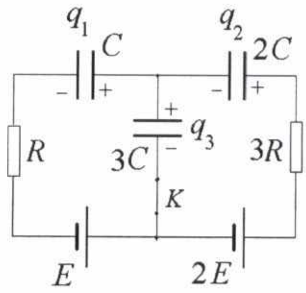
2) Во сколько раз изменение энергии конденсаторов больше тепла, выделившегося в схеме после замыкания ключа К?

Решение



До замыкания ключа К, конденсаторы С и 2С были соединены последовательно и зарядились до одинакового заряда q_0:

$$\frac{q_0}{C}+\frac{q_0}{2C}=E+2E\Rightarrow\frac{3q_0}{2C}=3E\Rightarrow q_0=2CE$$



После замыкания ключа К все конденсаторы перезарядятся и ток после этого прекратится. Запишем второе правило Кирхгофа для двух контуров:

$$\frac{q_1}{C}-\frac{q_3}{3C}=E$$

$$\frac{q_2}{2C}+\frac{q_3}{3C}=2E$$

Запишем закон сохранения заряда в замкнутой области:

$$q_1+q_3-q_2=q_0-q_0=0$$

Из первых двух уравнений выражаем $\begin{cases} q_1=CE+\dfrac{q_3}{3} \\ q_2=4CE-\dfrac{2q_3}{3} \end{cases}$

и подставляем в третье уравнение:

$$CE+\frac{q_3}{3}+q_3-4CE+\frac{2q_3}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad 2q_3=3CE \quad\Rightarrow\quad q_3=\frac{3CE}{2}.$$

При этом $q_1=CE+\dfrac{3CE}{2\cdot 3}=\dfrac{3CE}{2}$,

$$q_2=4CE-\frac{2}{3}q_3=4CE-CE=3CE.$$

1) Таким образом, можно понять, что дополнительный заряд $\Delta q_1=q_1-q_0=-\dfrac{1}{2}CE$ прошел через источник Е, при этом источник совершил работу $A_1=E\Delta q_1=\dfrac{1}{2}CE^2$.

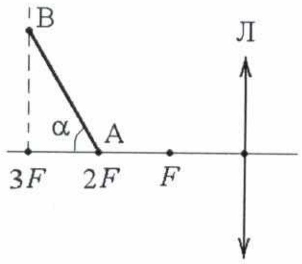
Аналогично, дополнительный заряд $\Delta q_2 = q_2 - q_0 = 3CE - 2CE$ прошел через источник 2Е, при этом этот источник совершил работу
$A_2 = 2E\Delta q_2 = 4CE^2$ $A_2 = 2E\Delta q_2 = 2CE^2$.
Работа источника 2Е в 4 раза больше работы источника Е.

2) Запишем закон изменения энергии системы: $A_{\text{ист.}} + A_{\text{внеш}} = \Delta W_{\text{сист}} + Q$
В этом случае внешние силы не совершают работу, поэтому $A_{\text{внеш}} = 0$

$$\Delta W_{сист} = \left(\frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2\cdot 2C} + \frac{q_3^2}{2\cdot 3C}\right) - \left(\frac{q_0^2}{2\cdot 2C} + \frac{q_0^2}{2\cdot 3C}\right) = \frac{3}{4}CE^2$$

$Q = A_1 + A_2 - \Delta W_{сиис} = \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4}\right)CE^2 = \frac{3}{4}CE^2$. Таким образом, количество выделившегося тепла равно изменению энергии конденсаторов.

	Критерии оценки	Балл
1	Определен первоначальный заряд на конденсаторах 2С и С	5
2	Записаны правила Кирхгофа для двух контуров.	3
3	Определены заряды на конденсаторах после замыкания ключа	5
4	Определена работа источников и найдено отношение работ	3
5	Записан закон изменения энергии системы, определено изменение энергии системы	2
6	Определено количество выделившегося тепла	2



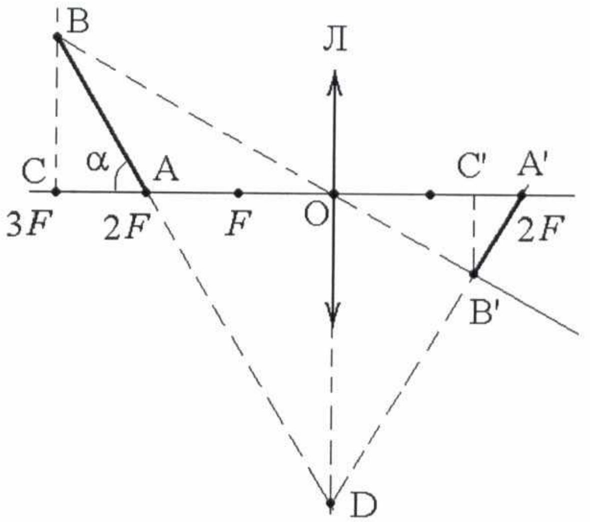
3. Стержень AB расположен под углом $\alpha=60°$ к главной оптической оси собирающей линзы Л, причем его нижний конец A находится в двойном фокусе линзы, а верхний конец B лежит на перпендикуляре к главной оптической оси, проведенном через тройной фокус линзы (см. рис.).

1) Построить изображение стержня в линзе

2) На сколько градусов повернуто изображение стержня по отношению к самому стержню?

3) Каково линейное увеличение стержня в линзе?

Решение



1) Для нахождения изображения отдельной точки в линзе достаточно провести два луча с известным продолжением после линзы.

Один из лучей чаще всего выбирается тот, который проходит через центр линзы, не претерпевая излома.

Второй луч можно провести из точечного источника через левый двойной фокус собирающей линзы до плоскости линзы, а далее он должен пойти в правый двойной фокус.

В данной ситуации можно использовать один луч для двух точек B и A, проходящий через левый двойной фокус – BAD, продолжение которого DB'A' пройдет через правый двойной фокус. Далее проведя лучи AOA' и BOB' до пересечения с лучом DB'A' получим изображение как двух точек A' и B', так и самого стержня A'B'.

2) Как видно из построения, треугольники AOD и A'OD одинаковы, так как у них одинаковы все стороны (AO = A'O = 2F). Поэтому углы $\angle OAD = \alpha = \angle OA'D = 60°$. Таким образом изображение повернуто относительно предмета на 120°.

3) Рассчитаем расстояние OC' с помощью формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{OC}+\frac{1}{OC'} \;\Rightarrow\; \frac{1}{OC'}=\frac{1}{F}-\frac{1}{3F}=\frac{2}{3F} \;\Rightarrow OC'=\frac{3}{2}F$$

Линейное увеличение линзы для отрезка $CB = CA\cdot\operatorname{tg}\alpha = F\cdot\sqrt{3}$ равно

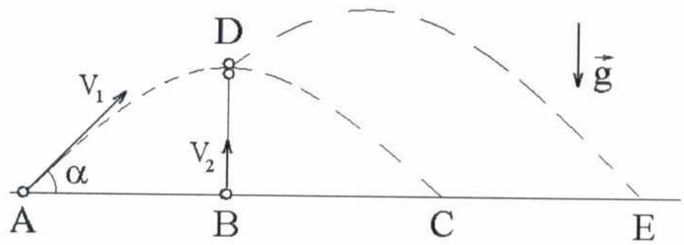
$\Gamma=\frac{C'B'}{CB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{3F/2}{3F}=\frac{1}{2}$. Таким образом катет $C'B'=\Gamma\cdot CB=\frac{\sqrt{3}F}{2}$. Второй катет

$C'A'=OA'-OC'=2F-\frac{3}{2}F=\frac{1}{2}F$. Длина изображения

$$A'B'=\sqrt{(C'A')^2+(C'B')^2}=\frac{F}{2}\sqrt{1+3}=F.$$

Длина стержня $AB = \frac{CA}{\cos\alpha} = 2F$. Линейное увеличение стержня равно $\Gamma_{ст} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$.

	Критерии оценки	Балл
1	Получено изображение стержня в линзе (изображения точек B и A в соответствии с правилами построения изображений)	10
2	Построение в линзе подкреплено расчетами, доказано подобие отрезков AB и A'B'	1-5
3	Определен угол поворота	1-2
4	Верно записана формула увеличения стержня и определена его величина	1-3



4. Первокурсник Андрей со своей сестрой пятиклассницей Лилей пошли на соседний стадион "изучать движение тел в поле тяжести Земли", а если короче, играть в мяч. Андрей каждый раз бил ногой по своему мячу так, что тот начинал движение из точки А с поверхности земли со скоростью $V_1 = 10\sqrt{2}$ м/с под углом α=45°, а падал в точке С. Лиля расположилась посередине между точками А и С в точке В и стала бросать свой мячик вертикально вверх, чтобы "сбить" мяч своего брата. Когда она наконец попала, мяч Андрея улетел в точку Е, причем $AE = \frac{3}{2}AC$, а ее собственный мяч вернулся к ней в точку В.

1) С какой скоростью V_2 бросала Лиля свой мяч?

2) С какой скоростью V_2' вернется этот мяч в точку В?

Массы мячей одинаковы. Принять удар мячей абсолютно упругим; размерами мячей и сестры Лили пренебречь, то есть считать, что ее мяч начинал движение с поверхности земли; сопротивлением воздуха и трением между мячами во время удара пренебречь; ускорение свободного падения принять g = 10 м/с^2.

Решение

Найдем формулы для дальности полета, высоты подъема и времени полета мяча из точки А до точки С:

$$AC = \frac{V_1^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad h = \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \quad t_{AC} = \frac{2V_1 \sin\alpha}{g}.$$

Во время полета мяча Андрея его горизонтальная скорость не меняется, так как ускорение вертикально:

$$V_{1x} = V_1 \cos\alpha = \text{const}.$$

Так как мяч Лили вернулся назад вертикально, то сила удара была вертикальна и не повлияла на горизонтальную скорость мяча Андрея – она осталась такой же после удара. Если горизонтальная скорость не изменилась, а горизонтальное перемещение увеличилось в 1,5 раза, то и время полета от точки А до точки Е возросло в 1,5 раза. Учитывая, что до точки D мяч потратил половину времени t_{AC}, время движение мяча от точки D до точки Е равно

$$t_{DC} = t_{AE} - t_{AD} = 1{,}5t_{AC} - 0{,}5t_{AC} = t_{AC} = \frac{2V_1 \sin\alpha}{g}$$

Напишем уравнение движения мяча после удара от точки D до точки Е в вертикальной проекции:

$$0 = h + V_y t_{DC} - \frac{g t_{DC}^2}{2}.$$

Отсюда найдем вертикальную скорость мяча после удара:

$$V_y = \frac{1}{t_{DC}}\left(\frac{gt_{DC}^2}{2} - h\right) = \frac{gt_{DC}}{2} - \frac{h}{t_{DC}} = V_1 \sin\alpha - \frac{V_1 \sin\alpha}{4} = \frac{3}{4} V_1 \sin\alpha$$

При ударе двух шаров из закона сохранения импульса и энергии можно получить такой результат:
так как вертикальная скорость первого мяча перед ударом равна нулю, а массы мячей одинаковы, то после удара второй мяч остановится, а первый приобретет его вертикальную скорость V_y (эффект биллиардных шаров) и продолжит свое движение.

Таким образом, становится понятным, что перед ударом мяч Лили имел вертикальную скорость $V_y = \frac{3}{4} V_1 \sin\alpha$ и находился на высоте $h = \frac{V_1^2 \sin^2\alpha}{g}$.

По закону сохранения энергии для мяча Лили найдем его начальную скорость:

$$\frac{mV_2^2}{2} = \frac{mV_y^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{V_y^2 + 2gh} = \sqrt{\frac{9}{16} V_1^2 \sin^2\alpha + V_1^2 \sin^2\alpha} = \frac{5}{4} V_1 \sin\alpha$$

$$V_2 = \frac{5}{4} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12{,}5 \text{ м/с}$$

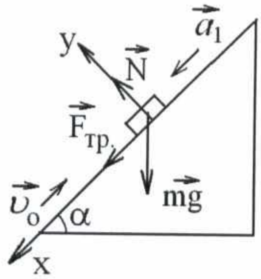
После удара этот мяч упал с высоты h без начальной скорости. Его скорость перед падением

$$V_2' = \sqrt{2gh} = V_1 \sin\alpha = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \text{ м/с}$$

	Критерии оценки	Балл
1	Найдены формулы для дальности полета, высоты подъема и времени полета мяча из точки А до точки С	3
2	Вычислены высота подъема и время движения до точки Е	3
3	Записаны законы сохранения импульса и энергии, определена начальная скорость падения мяча Лили 0 м/с,	7
4	Вычислена скорость падения ее мяча	2
5	Найдена скорость мяча Лили до столкновения с мячом Андрея. Определена начальная скорость, с которой Лиля бросила мяч	5

5. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 45°$. По ней пускают вверх камень, который поднявшись на некоторую высоту, соскальзывает вниз по тому же пути. Каков коэффициент трения камня о плоскость, если время спуска в два раза больше времени подъема?

Решение

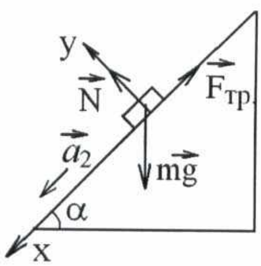


На рисунке расставлены действующие на тело силы.

Запишем II закон Ньютона для тела, поднимающегося по наклонной плоскости в проекции на координатные оси

$$\left.\begin{aligned} F_{тр} + mg\sin\alpha &= ma_1 \\ N - mg\cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Находим ускорение для первого случая $a_1 = g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$



Аналогично находим ускорение для тела, спускающегося по плоскости.

$$\left.\begin{aligned} -F_{тр} + mg\sin\alpha &= ma_2 \\ N - mg\cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

$a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

Ускорение $a_1 = \dfrac{\upsilon_0}{t}$; Путь $S = \upsilon_0 t_1 - \dfrac{a_1 t_1^2}{2} = \dfrac{a_1 t_1^2}{2} = \dfrac{a_2 t_2^2}{2}$.

Так как, $t_2 - 2t_1$, то $a_1 = 4a_2$.

$g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) = 4g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ отсюда получаем $5\mu\cos\alpha = 3\sin\alpha$

Следовательно, коэффициент трения скольжения равен $\mu = \dfrac{3}{5}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{5}tg\alpha = 0,6$.

Ответ: 0,6

	Критерии оценки	Балл
1	Записан закон движения тела при движении вниз, получено выражение для ускорения	6
2	Записан закон движения тела при движении вверх, получено выражение для ускорения	6
3	Записано условие связывающее время движения тела вверх и вниз	5
4	Получена формула для коэффициента трения	2
5	Дан ответ на вопрос задачи: получено значение коэффициента трения 0,6	1

Председатель методической комиссии Д.М.Левин