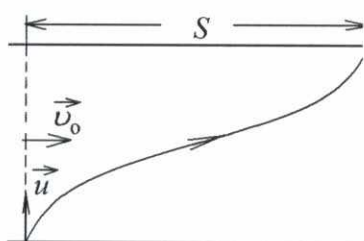


10 класс



1. Дети играют на берегу ручья шириной $L = 1$ м. Ваня с одного берега ручья запускает радиоуправляемый кораблик, а Петя на другом берегу ловит его и запускает обратно Ване. Ваня направляет кораблик таким образом, чтобы его скорость $u = 4$ м/с была направлена перпендикулярно течению. Скорость течения ручья возрастает пропорционально расстоянию от берега, достигая своего максимального значения $v_0 = 2$ м/с на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. На каком расстоянии S должен стоять Петя, чтобы кораблик попал ему в руки?

Решение

По оси y кораблик движется с постоянной скоростью, поэтому $y = ut$. Скорость течения меняется пропорционально расстоянию от берега, т.е. $v = ky = kut$.

(1)

Коэффициент пропорциональности найдем, зная скорость на середине ручья $v_0 = kut_1$, где t_1 – время, за которое кораблик достигнет середины ручья. Так как $t_1 = \frac{L}{2u}$, то $k = \frac{v_0}{ut_1} = \frac{v_0 \cdot 2u}{uL} = \frac{2v_0}{L}$. Подставляя в (1), получим скорость $v = \frac{2v_0 u}{L} t = a_x t$.

Следовательно, движение по оси x равноускоренное с ускорением $a_x = \frac{2v_0 u}{L}$. Тогда

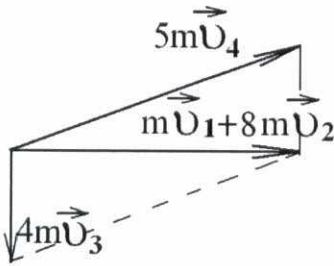
$$x = \frac{at^2}{2}; \quad \frac{S}{2} = \frac{at_1^2}{2} = \frac{2v_0 u}{L \cdot 2} \cdot \frac{L^2}{4u^2} = \frac{v_0 L}{4u}. \quad \text{Весь путь } S = \frac{v_0 L}{2u} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 4} = 0,25 \text{ м}$$

Ответ: $S = \frac{v_0 L}{2u} = 0,25$ м

	Критерии оценки	Балл
1	Определено время движения кораблика	5
2	Найдено ускорение, с которым кораблик движется на первой и второй половине пути	1-10
3	Вычислено смещение вдоль берега. Получен верный ответ	1-5

2. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 200 \text{ м/с}$, попадает в небольшой шар массой $M = 8m$, летящий также горизонтально навстречу пуле со скоростью $v_2 = 20 \text{ м/с}$. В результате столкновения шар разрывается на две равные части. Первая часть шара падает точно под местом столкновения шаров через $t = 2 \text{ с}$ после столкновения. Вторая часть шара летит вместе с застрявшей в ней пулей. С какой скоростью эта часть шара упадет на землю, если столкновение шара с пулей произошло на высоте $h = 35 \text{ м}$? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение



По закону сохранения импульса $m\vec{v}_1 + 8m\vec{v}_2 = 4m\vec{v}_3 + 5m\vec{v}_4$.

На основании этого закона сделан чертеж. Нарисован рисунок, правильно расставлены вектора. Так как неизвестен угол, под которым летит второй осколок, будем использовать для решения теорему Пифагора

$$(5mv_4)^2 = (mv_1 - 8mv_2)^2 + (4mv_3)^2 \Rightarrow (5v_4)^2 = (v_1 - 8v_2)^2 + (4v_3)^2 \quad (1)$$

Находим скорость первой части шара (полетевшей вниз)

$$0 = h - v_3 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_3 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} = \frac{35}{2} - \frac{10 \cdot 2}{2} = 7,5 \text{ м/с}.$$

Из (1) находим скорость второй части снаряда

$$v_4 = \frac{\sqrt{(v_1 - 8v_2)^2 + 16v_3^2}}{5} = \frac{\sqrt{(200 - 20 \cdot 8)^2 + 16 \cdot 7,5^2}}{5} = 10 \text{ м/с}.$$

Используем закон сохранения энергии для второй части снаряда (приравниваем энергию осколка сразу после разрыва и в момент падения на землю)

$$5mgh + \frac{5mv_4^2}{2} = \frac{5mv_5^2}{2}; \quad gh + \frac{v_4^2}{2} = \frac{v_5^2}{2}; \quad v_5 = \sqrt{2gh + v_4^2} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 35 + 100} = 28,3 \text{ м/с}$$

Ответ: 28,3 м/с

	Критерии оценки	Балл
1	Найдена скорость первой части шара (полетевшей вниз)	5
2	Записан закон сохранения импульса. Нарисован рисунок, правильно расставлены вектора.	5
3	Найдена скорость второй части снаряда.	5
4	Вычислена его скорость падения на землю	5

3. Из проволоки длиной $L = 3\text{ м}$ с сопротивлением $R = 500\text{ Ом}$ необходимо изготовить нагреватель для включения в сеть с напряжением $U = 200\text{ В}$. Чтобы не перегреть проволоку по ней можно пропускать ток не более $I_0 = 3\text{ А}$. Нагреватель какой наибольшей мощности можно получить, используя данную проволоку? При изготовлении нагревателя проволоку можно резать на куски и соединять эти куски последовательно или параллельно.

Решение

Мощность нагревателя, изготовленного из целой проволоки $P_0 = \frac{U^2}{R}$, будет маленькой. Если проволоку разрезать на кусочки и соединить их параллельно, то мощность будет $P = \frac{U^2 n}{r}$, где r – сопротивление отрезанного кусочка проволоки, n – число кусочков. Таким образом, чем больше кусочков, тем больше будет мощность нагревателя. Но сопротивление не может быть меньше, чем $r = \frac{U}{I_0}$, чтобы

проволока не перегорела. Сопротивления
 $R = \frac{\rho L}{S}$; $r = \frac{\rho \ell}{S}$; $\frac{R}{r} = \frac{L}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{rL}{R} = \frac{UL}{I_0 R} = \frac{200 \cdot 3}{3 \cdot 500} = 0,4\text{ м}$. Следовательно, проволоку

длиной $L = 3\text{ м}$ надо разрезать на $n = 7$ кусочков длиной $0,4\text{ м}$, а оставшиеся $0,2\text{ м}$ надо отбросить, т.к. если ее подсоединить параллельно с остальными, то она сгорит, а если последовательно, то общее сопротивление станет больше, а мощность меньше.

Тогда получившаяся мощность $P = \frac{U^2 n}{r} = \frac{U^2 n I_0}{U} = U I_0 n = 200 \cdot 3 \cdot 7 = 4200\text{ Вт}$

Ответ: 4200 Вт

	Критерии оценки	Балл
1	Определено условие, когда мощность будет максимальна – параллельное соединение	5
2	Определено минимальное сопротивление, при котором проволока не перегорит	5
3	Определено как надо разрезать проволоку	5
4	Вычислена максимальная мощность	5

4. Колокол для подводных работ объемом $V = 10 \text{ м}^3$ опускается вверх дном с борта корабля на дно водоема глубиной $h = 20 \text{ м}$. Зашедшая в колокол вода вытесняется из него с помощью баллонов со сжатым воздухом. Объем одного баллона $V_0 = 40 \text{ л}$, давление внутри 200 атм. Найти минимальное количество баллонов, которое нужно подсоединить к колоколу с помощью шланга, чтобы вытеснить из него воду. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Атмосферное давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. Температуру считать постоянной.

Решение

Давление на дне водоема будет равно $P_2 = P_0 + \rho gh = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 20 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, где $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ - атмосферное давление, ρgh - давление столба воды. Уравнение состояния для воздуха в колоколе, находящемся над водой $\frac{m_1}{\mu} RT = P_0 V$, на дне водо-

ема $\frac{m_2}{\mu} RT = P_2 V$, где m_2 - масса воздуха, необходимого, чтобы заполнить весь объ-

ем колокола. Следовательно, надо добавить массу $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{(P_2 - P_0)V\mu}{RT}$.

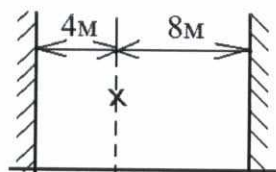
Для одного баллона со сжатым воздухом можем записать $\frac{m_3}{\mu} RT = P_3 V_0 \Rightarrow m_3 = \frac{P_3 V_0 \mu}{RT}$.

Тогда число необходимых баллонов равно

$$n = \frac{\Delta m}{m_3} = \frac{(P_2 - P_0)V}{P_3 V_0} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10}{200 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \text{ баллона.}$$

Ответ: 2,5 или 3

	Критерии оценки	Балл
1	Найдено давление на дне водоема	3
2	Определена масса воздуха в колоколе на поверхности	5
3	Определена масса воздуха в колоколе на дне	5
4	Определена масса воздуха в баллоне	5
5	Вычислено необходимое число баллонов	2



5. Между двумя плоскими параллельными зеркалами, расположенными вертикально, находится объект. Расстояния от объекта до зеркал указаны на рисунке. Найти расстояние между вторым изображением в правом зеркале и самим объектом. Счет вести от объекта слева направо. Ответ пояснить чертежом.

Ответ: 32 м.

	Критерии оценки	Балл
1	Выполнен чертеж, пояснено получение каждого из изображений	1-10
2	Найдены расстояния от зеркал до изображений	1-8
3	По результатам решения получен правильный ответ	2