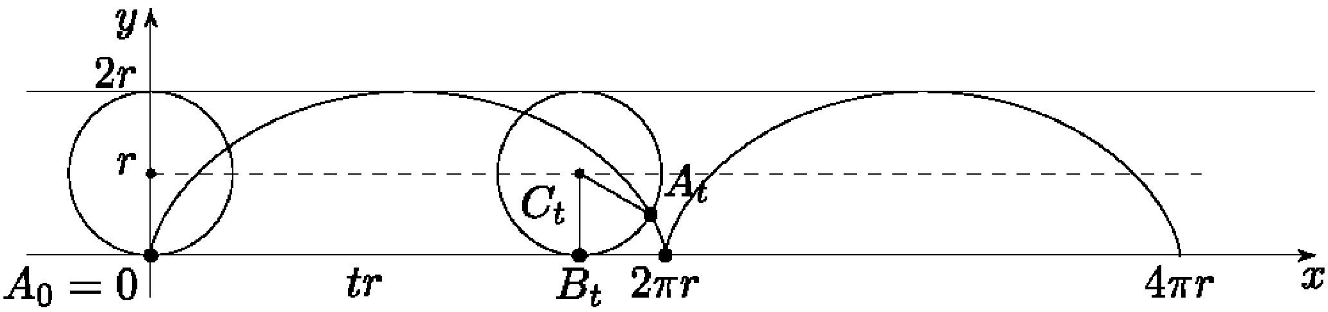
11 класс

Кинематика

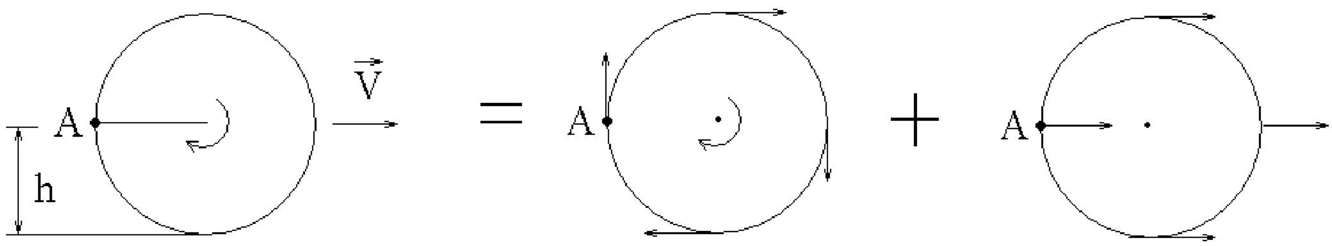
1.1. *Рулетта (циклоида) является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота.*

Паскаль



Колесо радиуса r = 1 м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью V = 3,14 м/с. В какой-то момент $t_0 = 0$ некоторая точка А на ободе колеса находится на высоте $h = r$ от земли и движется по циклоиде *вверх*. во сколько раз изменится скорость точки А относительно земли через $t =$ 0,5 с?

Решение:



Движение колеса, катящегося без проскальзывания можно разложить на два независимых движения: вращательное относительно оси с угловой скоростью $\omega = \dfrac{V}{r}$ и поступательное со скоростью V.

В начальный момент точка А по условию находится на левом конце горизонтального диаметра (см.рис.). Векторно складывая скорости двух этих независимых движений точки, получим скорость относительно стола в начальный момент:

$$V_1 = \sqrt{V^2 + V^2} = V\sqrt{2}$$

За время $t =$ 0,5 с колесо повернется на угол $\Delta\varphi = \omega t = \dfrac{V}{r}t = \dfrac{3{,}14 \cdot 0{,}5}{1} = \dfrac{\pi}{2}$, то есть на 90°, и точка А окажется в верхней точке колеса.

Аналогично просуммируем векторы скоростей независимых движений токи А в этот момент времени:

$$V_2 = 2V.$$

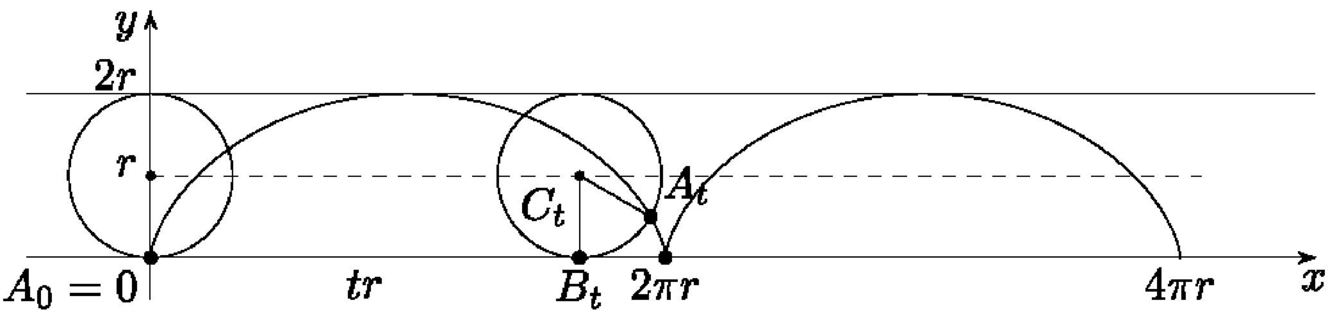
Таким образом, скорость увеличилась в $\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{2}$ раз

Ответ: в 1,41 раз увеличилась.

	Критерии оценки	Балл
1	Показано, что скорость точки А можно представить в виде двух слагаемых вращательной составляющей скорости и поступательного движения колеса как целого $\vec{V} = \vec{V}_{вращ} + \vec{V}_{поступат}$ Определена угловая скорость вращения колеса $\omega = \frac{V}{r} = \pi \frac{рад}{c}$ (или вычислен период Т=2сек)	5
2	Определена скорость точки А в начальный момент времени а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в начальный момент времени (1-4 баллов) б) определена скорость $V_1 = \sqrt{V^2 + V^2} = V\sqrt{2}$ (2 балла)	6
3	Определен угол, на который повернется колесо $\Delta\varphi = \omega \cdot t = 90^0$	2
4	Определено положение точки А скорость этой точки в момент времени $t =$ 0,5 с а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в этот момент времени (1-4 баллов) б) определена скорость $V_2 = 2V$ (2 балла)	6
5	Дан ответ на вопрос задачи : скорость увеличилась в 1,41 раза	1

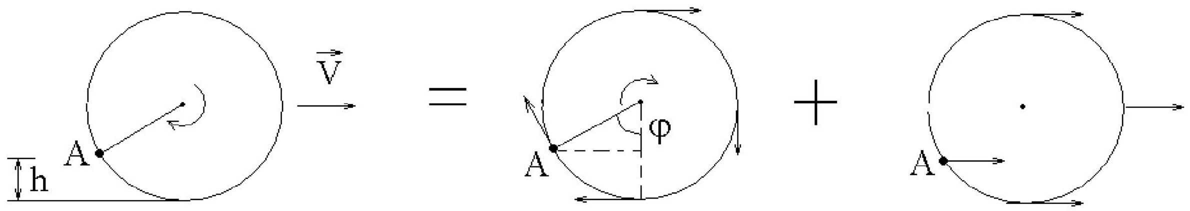
1.2. *Рулетта (циклоида) является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота.*

Паскаль



Колесо радиуса r = 1 м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью V = 6,28 м/с. В какой-то момент $t_0 = 0$ некоторая точка А на ободе колеса находится на высоте $h = \frac{r}{2}$ от земли и движется по циклоиде *вверх*. во сколько раз изменится скорость точки А относительно земли через $t = \frac{1}{3}$ с?

Решение:



Движение колеса, катящегося без проскальзывания можно разложить на два независимых движения: вращательное относительно оси с угловой скоростью $\omega = \frac{V}{r}$ и поступательное со скоростью V.

В начальный момент радиус, проведенный к точке А составляет угол $\varphi =$ 60° с вертикалью, так как $\cos = \frac{r-h}{r} = \frac{1}{2}$ (см.рис.). Складывая проекции скоростей двух этих независимых движений точки, получим скорость относительно стола в начальный момент:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{\left(V - V\cos\varphi\right)^2 + \left(V\sin\varphi\right)^2} = V$$

За время $t =$ 0,5 с колесо повернется на угол $\Delta\varphi = \omega t = \frac{V}{r}t = \frac{6{,}28}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$, то есть на 120°, и точка А окажется в верхней точке колеса.

Просуммируем векторы скоростей независимых движений токи А в этот момент времени:

$V_2 = 2V$. Таким образом, скорость увеличилась в $\frac{V_2}{V_1} = 2$ раза

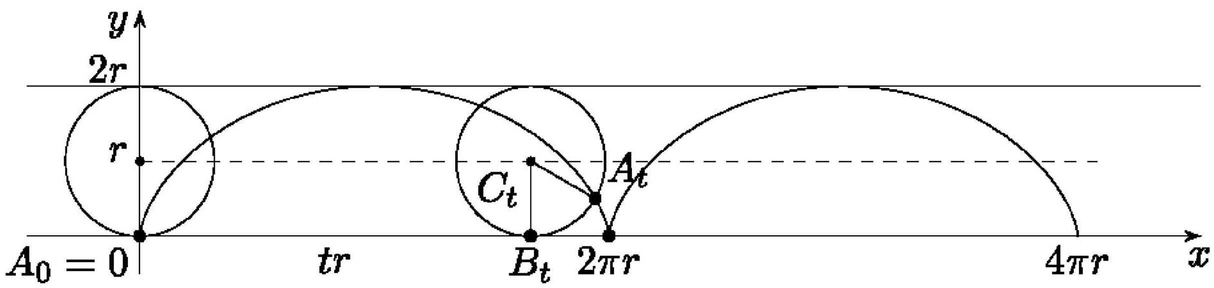
Ответ: увеличилась в 2 раза.

	Критерии оценки	Балл
1	Показано, что скорость точки А можно представить в виде двух слагаемых вращательной составляющей скорости и поступательного движения колеса как целого $\vec{V} = \vec{V}_{вращ} + \vec{V}_{поступат}$ Определена угловая скорость вращения колеса $\omega = \frac{V}{r} = 2\pi \frac{рад}{c}$ (или вычислен период Т=1сек)	5
2	Определена скорость точки А в начальный момент времени а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в начальный момент времени (1-5 баллов) б) определена скорость относительно поверхности $V_1 = \sqrt{(V - V\cos(\varphi))^2 + (V\sin(\varphi))^2} = V$ (2 балла)	6
3	Определен угол, на который повернется колесо $\Delta\varphi = \omega \cdot t = 120^0$	2
4	Определено положение точки А скорость этой точки в момент времени $t =$ 1/3 с а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в этот момент времени (1-4 баллов)	6

	б) определена скорость $V_2 = 2V$ (2 балла)	
5	Дан ответ на вопрос задачи : скорость увеличилась в 2 раза	1

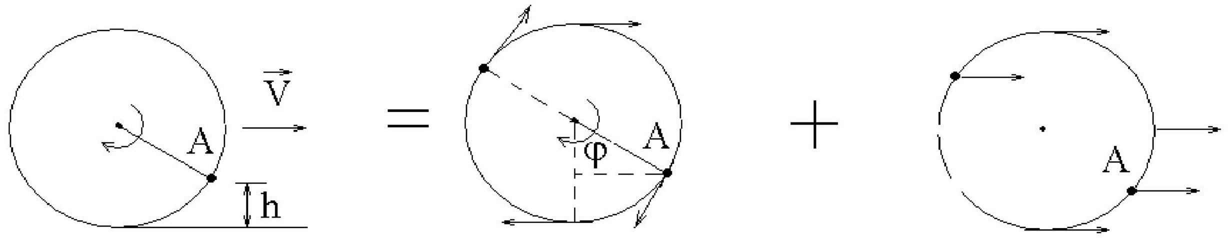
1.3. *Рулетта (циклоида) является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние, ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота.*

Паскаль



Колесо радиуса r = 2 м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью V = 1,57 м/с. В какой-то момент $t_0 = 0$ некоторая точка А на ободе колеса находится на высоте h =1 м от земли и движется по циклоиде *вниз*. Во сколько раз изменится скорость точки А относительно земли через t = 4 с?

Решение:



Движение колеса, катящегося без проскальзывания можно разложить на два независимых движения: вращательное относительно оси с угловой скоростью $\omega = \dfrac{V}{r}$ и поступательное со скоростью V.

В начальный момент радиус, проведенный к точке А составляет угол $\varphi =$ 60°, так как $\cos = \dfrac{r-h}{r} = \dfrac{1}{2}$ (см.рис.). Складывая проекции скоростей двух этих независимых движений точки, получим скорость относительно стола в начальный момент:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{\left(V - V\cos\varphi\right)^2 + \left(V\sin\varphi\right)^2} = V$$

За время $t =$ 4 с колесо повернется на угол $\Delta\varphi = \omega t = \dfrac{V}{r}t = \dfrac{1{,}57}{2}\cdot 4 = 3{,}14 = \pi$, то есть на 180° , и точка А окажется в диаметрально противоположной точке колеса.

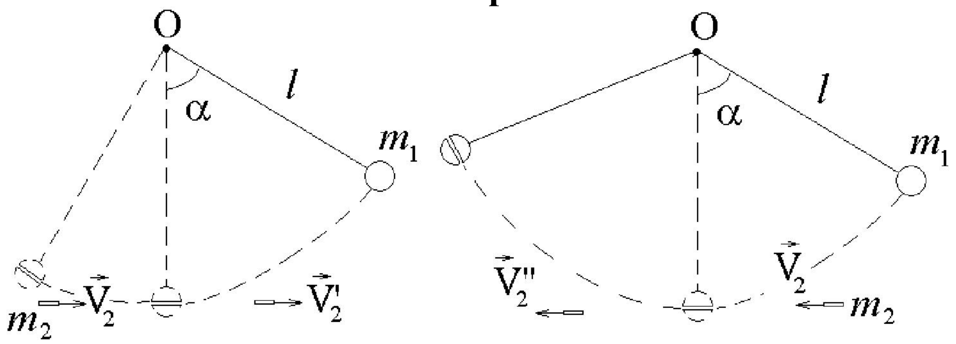
Складывая проекции скоростей двух независимых движений точки, получим скорость относительно стола в момент t = 4 с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \sqrt{\left(V{+}V\cos\varphi\right)^2 + \left(V\sin\varphi\right)^2} = V\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = V\sqrt{3}$$

Ответ: увеличится в $\sqrt{3}$ раз

	Критерии оценки	Балл
1	Показано, что скорость точки А можно представить в виде двух слагаемых вращательной составляющей скорости и поступательного движения колеса как целого $\vec{V} = \vec{V}_{вращ} + \vec{V}_{поступат}$ Определена угловая скорость вращения колеса $\omega = \frac{V}{r} = 0{,}25\pi \frac{рад}{c}$ (или вычислен период Т=8сек)	5
2	Определена скорость точки А в начальный момент времени а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в начальный момент времени (1-5 баллов) б) определена скорость относительно поверхности $V_1 = \sqrt{(V - V\cos(\varphi))^2 + (V\sin(\varphi))^2} = V$ (2 балла)	6
3	Определен угол, на который повернется колесо $\Delta\varphi = \omega \cdot t = 180^0$	2
4	Определено положение точки А скорость этой точки в момент времени $t =$ 0,5 с а) выполнен рисунок показывающий направление скорости точки А в этот момент времени (1-4 баллов) б) определена скорость $V_1 = \sqrt{(V + V\cos(\varphi))^2 + (V\sin(\varphi))^2} = V\sqrt{3}$ (2 балла)	6
5	Дан ответ на вопрос задачи: скорость увеличилась в $\sqrt{3}$ раз	1

Законы сохранения



2.1 Два шара массой m_1 = 1 кг каждый, подвешенные на нитях длиной l = 90 см, отводят от положения равновесия на угол α = 60° и отпускают. В момент прохождения шарами положения равновесия в них попадают пули массами m_2 = 10 г каждая – одна, летящая навстречу шару со скоростью V_2 = 300 м/с, а вторая, летящая с такой же скоростью, но догоняя шар. Они пробивают эти шары и вылетают горизонтально со скоростями первая V_2' = 200 м/с, а вторая с некоторой скоростью V_2'', после чего шары продолжают движение в прежнем направлении, поднимаясь на некоторую высоту h_1 и h_2. Во сколько раз высота подъема h_2 больше h_1, если потери энергии на тепло при столкновении шаров с пулями были одинаковыми? Принять g = 10 м/с^2.

Решение:

Найдем скорость шаров в положении равновесия (из закона сохранения энергии):

$$m_1 gl\left(1-\cos\alpha\right) = \frac{m_1 V_1^2}{2} \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9\cdot\left(1-0{,}5\right)} = 3 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения импульса найдем скорость первого шара после встречи с пулей:

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 = m_1 V_1' - m_2 V_2' \Rightarrow V_1' = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2 + m_2 V_2'}{m_1} = \frac{1\cdot 3 - 0{,}01\cdot 300 + 0{,}01\cdot 200}{1} = 2 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения энергии найдем высоту подъема шара h_1

$$\frac{m_1 V_1^{'2}}{2} = m_1 g h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{V_1^{'2}}{2g} = \frac{2^2}{20} = 0,2 \text{ м}$$

При пробивании шара часть энергии шара и пули перешла в тепло

$$Q = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 V_1^{'2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{'2}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1 \cdot 3^2}{2} + \frac{0,01 \cdot 300^2}{2}\right) - \left(\frac{1 \cdot 2^2}{2} + \frac{0,01 \cdot 200^2}{2}\right) = 454,5 - 202 = 252,5 \text{ Дж}$$

При пробивании второго шара выделится столько же тепла

$$Q = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 V_1^{''2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{''2}}{2}\right) = 454,5 - \left(\frac{1 \cdot V_1^{''2}}{2} + \frac{0,01 \cdot V_2^{''2}}{2}\right) = 252,5 \text{ Дж}$$

$$\Rightarrow \quad V_1^{''2} + 0,01 \cdot V_2^{''2} = 2 \cdot (454,5 - 252,5) = 404 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

Из закона сохранения импульса

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1^{''} + m_2 V_2^{''} \quad \Rightarrow \quad V_2^{''} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2 - m_1 V_1^{''}}{m_2} = \frac{1 \cdot 3 + 0,01 \cdot 300 - 1 \cdot V_1^{''}}{0,01} = 600 - 100 V_1^{''}$$

Подставим это выражение в предыдущее уравнение и найдем $V_1^{''}$

$$V_1^{''2} + 0,01 \cdot \left(600 - 100 V_1^{''}\right)^2 = 404 \text{ м}^2/\text{с}^2 \quad \Rightarrow \quad V_1^{''2} + 3600 - 1200 V_1^{''} + 100 V_1^{''2} = 404$$

$$101 V_1^{''2} - 1200 V_1^{''} + 3196 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} = \sqrt{1200^2 - 4 \cdot 101 \cdot 3196} = \sqrt{148816} = 385,8 \text{ м/с}$$

$V_1^{''} = \dfrac{1200 - 385,8}{202} = 4,03$ м/с . Второе решение $V_1^{''} = \dfrac{1200 + 385,8}{202} = 7,85$ м/с не подходит, так как в этом случае скорость пули $V_2^{''} = 600 - 100 V_1^{''} = -185$ м/с будет отрицательной, что не удовлетворяет условию движения пули в том же направлении, что и до попадания в шар.

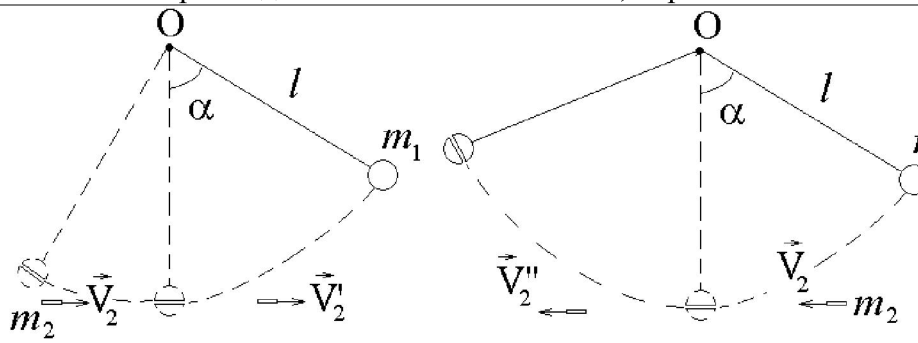
По закону сохранения энергии найдем h_2:

$$\frac{m_1 V_1^{''2}}{2} = m_1 g h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{V_1^{''2}}{2g} = \frac{4,03^2}{20} = 0,812 \text{ м}$$

Ответ: $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{0,812}{0,2} = 4,06$ **раз**

	Критерии оценки	Балл
1	Записан закон сохранения энергии для определения скорости шаров в нижнем положении $\vec{V}_1 = 3 м/с$	2
2	Для первого шара записан закон сохранения импульса, определена его скорость после столкновения $\vec{V}_1^{'} = 2 м/с$	2
3	Определена энергия, перешедшая в тепло (252,5 Дж)	2
4	Для первого шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_1	2
5	Найдена высота h_1 (0,2) на которую поднимется шар после столкновения с пулей	3
6	Для второго шара записан закон сохранения импульса	2
7	Для второго шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_2	2
8	Найдена высота h_2 (0,812м) на которую поднимется шар после столкно-	3

	вения с пулей	
9	Дан ответ на вопрос задачи – отношение высот 4,06 раз	2



2.2 Два шара массой m_1 = 1 кг каждый, подвешенные на нитях длиной l = 90 см, отводят от положения равновесия на угол α = 60° и отпускают. В момент прохождения шарами положения равновесия в них попадают пули массами m_2 = 10 г каждая – одна, летящая навстречу шару со скоростью V_2 = 400 м/с, а вторая, летящая с такой же скоростью, но догоняя шар. Они пробивают эти шары и вылетают горизонтально со скоростями первая V_2' = 300 м/с, а вторая с некоторой скоростью V_2'', после чего шары продолжают движение в прежнем направлении, а их нити отклоняются на некоторые углы β_1 и β_2 от вертикали. На сколько градусов больше отклонится нить второго шара от вертикали, если потери энергии на тепло при столкновении шаров с пулями были одинаковыми? Принять g = 10 м/с^2.

Решение:

Найдем скорость шаров в положении равновесия (из закона сохранения энергии):

$$m_1 g l\left(1-\cos\alpha\right)=\frac{m_1 V_1^2}{2} \Rightarrow V_1=\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9\cdot\left(1-0{,}5\right)}=3 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения импульса найдем скорость первого шара после встречи с пулей:

$$m_1V_1-m_2V_2=m_1V_1'-m_2V_2' \Rightarrow V_1'=\frac{m_1V_1-m_2V_2+m_2V_2'}{m_1}=\frac{1\cdot 3-0{,}01\cdot 400+0{,}01\cdot 300}{1}=2 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения энергии найдем высоту подъема шара h_1

$$\frac{m_1V_1'^2}{2}=m_1gh_1 \Rightarrow h_1=\frac{V_1'^2}{2g}=\frac{2^2}{20}=0{,}2 \text{ м} \quad \cos\beta=\frac{l-h_1}{l}=\frac{0{,}9-0{,}2}{0{,}9}=0{,}778 \Rightarrow \beta_1=38{,}9°$$

При пробивании шара часть энергии шара и пули перешла в тепло

$$Q=\left(\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}\right)-\left(\frac{m_1V_1'^2}{2}+\frac{m_2V_2'^2}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1\cdot 3^2}{2}+\frac{0{,}01\cdot 400^2}{2}\right)-\left(\frac{1\cdot 2^2}{2}+\frac{0{,}01\cdot 300^2}{2}\right)=804{,}5-450=354{,}5 \text{ Дж}$$

При пробивании второго шара выделится столько же тепла

$$Q=\left(\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}\right)-\left(\frac{m_1V_1''^2}{2}+\frac{m_2V_2''^2}{2}\right)=804{,}5-\left(\frac{1\cdot V_1''^2}{2}+\frac{0{,}01\cdot V_2''^2}{2}\right)=354{,}5 \text{ Дж}$$

$$\Rightarrow V_1''^2+0{,}01\cdot V_2''^2=2\cdot\left(804{,}5-354{,}5\right)=900 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

Из закона сохранения импульса

$$m_1V_1+m_2V_2=m_1V_1''+m_2V_2'' \Rightarrow V_2''=\frac{m_1V_1+m_2V_2-m_1V_1''}{m_2}=\frac{1\cdot 3+0{,}01\cdot 400-1\cdot V_1''}{0{,}01}=700-100V_1''$$

Подставим это выражение в предыдущее уравнение и найдем V_1''

$$V_1''^2 + 0,01\cdot\left(700 - 100V_1''\right)^2 = 900\ \text{м}^2/\text{с}^2 \quad \Rightarrow \quad V_1''^2 + 4900 - 1400V_1'' + 100V_1''^2 = 900$$

$$101V_1''^2 - 1400V_1'' + 4000 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} = \sqrt{1400^2 - 4\cdot101\cdot4000} = \sqrt{344000} = 586,5\ \text{м/с}$$

$V_1'' = \dfrac{1400 - 3586,5}{202} = 4,03$ м/с. Второе решение $V_1'' = \dfrac{1400 + 586,5}{202} = 9,83$ м/с не подходит, так как в этом случае скорость пули $V_2'' = 700 - 100V_1'' = -283$ м/с будет отрицательной, что не удовлетворяет условию движения пули в том же направлении, что и до попадания в шар.

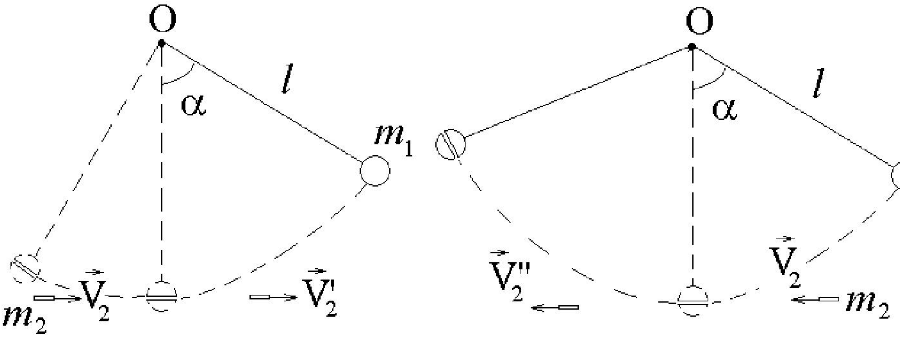
По закону сохранения энергии найдем h_2:

$$\frac{m_1V_1''^2}{2} = m_1gh_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{V_1''^2}{2g} = \frac{4,03^2}{20} = 0,812\ \text{м}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{l - h_2}{l} = \frac{0,9 - 0,812}{0,9} = 0,0978 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 84,4°$$

Ответ: $\beta_2 - \beta_1 = 84,4 - 38,9 = 45,5°$

	Критерии оценки	Балл
1	Записан закон сохранения энергии для определения скорости шаров в нижнем положении $\vec{V}_1 = 3 м/с$	2
2	Для первого шара записан закон сохранения импульса, определена его скорость после столкновения $\vec{V}_1' = 2 м/с$	2
3	Определена энергия, перешедшая в тепло (354,5 Дж)	2
4	Для первого шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_1	2
5	Найдена высота h_1 (0,2) на которую поднимется шар после столкновения с пулей Определен угол отклонения первого шара после столкновения $\cos\beta = 0.778(\beta = 38,9^0)$	3
6	Для второго шара записан закон сохранения импульса	2
7	Для второго шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_2	2
8	Найдена высота h_2 (0,812м) на которую поднимется шар после столкновения с пулей. Определен угол отклонения второго шара после столкновения $\cos\beta = 0.0978(\beta = 84,4^0)$	3
9	Дан ответ на вопрос задачи – разность углов $45,5^0$	2



2.3 Два шара массой m_1 = 1 кг каждый, подвешенные на легких нерастяжимых стержнях длиной l = 90 см, отводят от положения равновесия на угол α = 60° и отпускают. В момент прохождения шарами положения равновесия в них попадают пули массами m_2 = 10 г каждая – одна, летящая навстречу шару со скоростью V_2 = 500 м/с, а вторая, летящая с такой же скоростью, но догоняя шар. Они пробивают эти шары и вылетают горизонтально со скоростями первая V_2' = 300 м/с, а вторая с некоторой скоростью V_2'', после чего шары продолжают движение в прежнем направлении, поднимаясь на некоторую высоту h_1 и h_2. Во сколько раз высота подъема h_2 больше h_1, если в обоих случаях считать одинаковыми время взаимодействия и среднюю силу взаимодействия между пулями и шарами? Принять g = 10 м/с^2.

Решение:

Найдем скорость шаров в положении равновесия (из закона сохранения энергии):

$$m_1 gl(1-\cos\alpha) = \frac{m_1 V_1^2}{2} \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9\cdot(1-0{,}5)} = 3 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения импульса найдем скорость первого шара после встречи с пулей:

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 = m_1 V_1' - m_2 V_2' \Rightarrow V_1' = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2 + m_2 V_2'}{m_1} = \frac{1\cdot 3 - 0{,}01\cdot 500 + 0{,}01\cdot 300}{1} = 1 \text{ м/с}$$

Из закона сохранения энергии найдем высоту подъема шара h_1

$$\frac{m_1 V_1'^2}{2} = m_1 g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{V_1'^2}{2g} = \frac{1^2}{20} = 0{,}05 \text{ м}$$

Импульс силы, уменьшающий импульс первого шара равен $|\Delta\vec{p}| = F_{ср}\cdot\Delta t = |m_1 V_1' - m_1 V_1| = 2$ кг$\cdot$м/с

Если средняя сила и время удара во втором случае такие же, то и импульс силы будет такой же, но теперь он будет увеличивать импульс второго шара, т.е.

$m_1 V_1'' = m_1 V_1 + |\Delta\vec{p}| = 5$ кг$\cdot$м/с. Таким образом, после удара второй шар приобретет скорость 5 м/с и поднимется на высоту $h_2 = \frac{V_1''^2}{2g} = \frac{5^2}{20} = 1{,}25$ м

Ответ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1{,}25}{0{,}05} = 25$ **раз**

	Критерии оценки	Балл
1	Записан закон сохранения энергии для определения скорости шаров в нижнем положении $\vec{V}_1 = 3 м/с$	2
2	Для первого шара записан закон сохранения импульса, определена его скорость после столкновения $\vec{V}_1' = 1 м/с$	2
3	Показано, что, так как время удара и средняя сила изменяющая импульс в двух случаях одинаковы, изменение импульса шаров будет одинаковым и равно $2 кг\cdot м/с$	2
4	Для первого шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_1	2
5	Найдена высота h_1 (0,05) на которую поднимется шар после столкновения с пулей	3

6	Для второго шара найден импульс после столкновения с пулей $5кг \cdot м/с$ и найдена его скорость $5м/с$	2
7	Для второго шара записан закон сохранения энергии для определения высоты h_2	2
8	Найдена высота h_2 (1,25м) на которую поднимется шар после столкновения с пулей	3
9	Дан ответ на вопрос задачи – отношение высот 25 раз	2

2.4. По горизонтальной гладкой плоскости перпендикулярно к вертикальной стене движется шайба массы m = 100 г с некоторой скоростью V_1 (см. рис.А). После неупругого удара о стенку шайба отскочила со скоростью V_2. На рисунке В приведен график зависимости проекции на ось x силы давления стенки на шайбу. Используя график на рис.В, найдите

1) во сколько раз изменилась скорость шайбы при ударе;

2) тепло, выделившееся при ударе шайбы о стенку. Ответ дать в миллиджоулях, округлив до целых

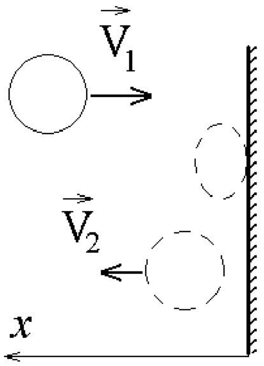


Рис. А

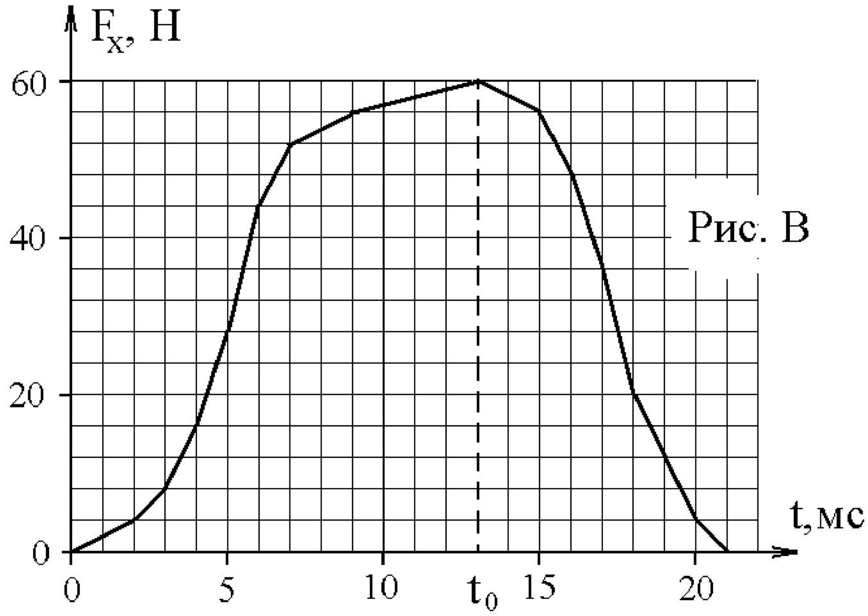


Рис. В

Решение:

Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 13 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к стене максимально и остановилась.

Используем понятие импульса силы $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, разбив интервал времени взаимодействия на очень малые промежутки времени Δt. Но $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$.

Найдем площади под графиком в интервале от 0 до t_0=13 мс и от t_0 до 21 мс.

S_1 = 0,468 Н·с; S_2 = 0,264 Н·с. С другой стороны эти площади равны изменению проекции импульсов на этих интервалах времени:

$\Delta p_{x1} = 0 - (-mV_1) = p_1$; $\Delta p_{x2} = mV_2 - 0 = p_2$ Отсюда можно найти начальную и конечную скорости шайбы:

$V_1 = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{468}{10} = 46,8$ м/с; $V_2 = \frac{\Delta p_{x2}}{m} = \frac{264}{10} = 26,4$ м/с

Тепло, выделившееся при ударе равно

$$Q = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} = \frac{0,468^2}{2 \cdot 0,1} - \frac{0,264^2}{2 \cdot 0,1} = 0,7466 \text{ Дж} \approx 747 \text{ мДж}$$

Скорость уменьшилась в $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{0,468}{0,264} \approx 1,8$ раза

	Критерии оценки	Балл
1	Показано: *Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 13 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к стене максимально и остановилась.*	2
2	Из второго закона Ньютона получено выражение для изменения импульса $\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t$	2
3	Так как сила переменная, за равные промежутки времени импульс меняется не равномерно и суммарное изменение импульса $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, а $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$	4
4	Найдены площади под графиком в интервале от 0 до t_0=13 мс и от t_0 до 21 мс. S_1 = 0,468 Н·с; S_2 = 0,264 Н·с.	4
5	Найдены конечная и начальная скорость $V_1 = \frac{\Delta p_1}{m} = \frac{S_1}{m} = 46{,}8 м/с$; $V_2 = \frac{\Delta p_2}{m} = \frac{S_2}{m} = 26{,}4 м/с$	4
6	Тепло выделившееся при ударе: $Q = \frac{p_1^2}{m} - \frac{p_2^2}{m} = \frac{S_1^2 - S_2^2}{m}$	2
7	Дан ответ на вопрос задачи – скорость уменьшилась в 1,8 раза	1
8	Дан ответ на вопрос задачи – тепло выделившееся при ударе Q=747мДж	1

2.5. По горизонтальной гладкой плоскости перпендикулярно к вертикальной стене движется шайба массы m с некоторой скоростью V_1 (см. рис.А). После неупругого удара о стенку шайба отскочила со скоростью V_2. На рисунке В приведен график зависимости проекции на ось x силы давления стенки на шайбу. Используя график на рис.В, найдите

1) массу шайбы, если тепло выделившееся при ударе шайбы о стенку равно Q = 8 мДж. Ответ дать в граммах, округлив до целых.

2) Во сколько раз изменилась скорость шайбы при ударе?

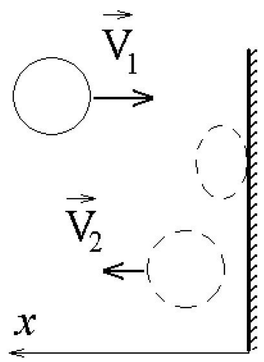


Рис. А

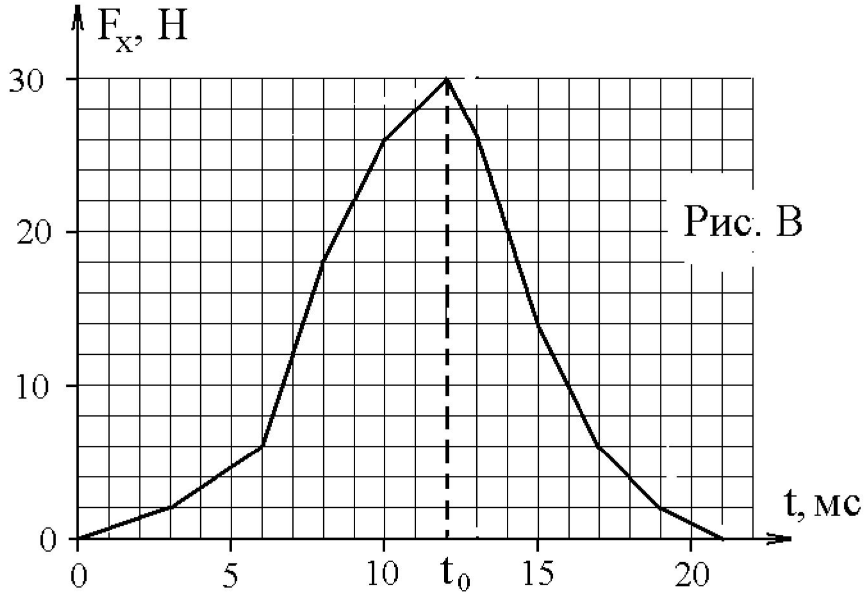


Рис. В

Решение:

Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 12 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к стене максимально и остановилась.

Используем понятие импульса силы $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, разбив интервал времени взаимодействия на очень малые промежутки времени Δt . Но $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$.

Найдем площади под графиком в интервале от 0 до t_0=12 мс и от t_0 до 21 мс.

S_1 = 0,139 Н·с; S_2 =0,098 Н·с. С другой стороны эти площади равны изменению проекции импульсов на этих интервалах времени:

$$\Delta p_{x1} = 0 - \left(-mV_1\right) = mV_1 = p_1;\ \Delta p_{x2} = mV_2 - 0 = mV_2 = p_2.$$

Тепло, выделившееся при ударе равно $Q = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m}$, откуда можно найти массу шайбы:

$$m = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2Q} = \frac{0,139^2 - 0,098^2}{2 \cdot 0,008} = 0,6073 \text{ кг} \approx 607 \text{ г}$$

Скорость шайбы уменьшилась в $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{0,139}{0,098} \approx 1,4$ раза

	Критерии оценки	Балл
1	Показано: *Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 12 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к стене максимально и остановилась.*	2
2	Из второго закона Ньютона получено выражение для изменения импульса $\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t$	2
3	Так как сила переменная, за равные промежутки времени импульс меняется не равномерно и суммарное изменение импульса $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, а $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$	4
4	Найдены площади под графиком в интервале от 0 до t_0=13 мс и от t_0 до 21 мс. S_1 = 0,139 Н·с; S_2 = 0,098 Н·с.	4
	Тепло выделившееся при ударе: $Q = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} = \frac{S_1^2 - S_2^2}{2m}$ следовательно, масса $m = \frac{2Q}{S_1^2 - S_2^2} = 0.607$ *кг*	4
5	Найдены конечный и начальный импульс: $\Delta p_1 = S_1 = 0 - (-p_1) = p_1$, $\Delta p_2 = S_2 = p_2 - 0 = p_2$, получено соотношение скоростей $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{S_2}{S_1}$	2
6	Дан ответ на вопрос задачи – скорость уменьшилась в 1,4 раза	1
7	Дан ответ на вопрос задачи – масса шайбы 607 г	1

2.6. По горизонтальной гладкой плоскости движутся навстречу друг другу очень массивная плита со скоростью u = 0,3 м/с и перпендикулярно к поверхности плиты шайба массы m = 0,5 кг с некоторой скоростью V_1 (см. рис.А). После неупругого удара о плиту шайба отскочила со скоростью V_2. На рисунке В приведен график зависимости проекции на ось x силы давления плиты на шайбу. Используя график на рис.В, найдите

1) работу, совершенную плитой над шайбой;
2) тепло, выделившееся при ударе. Ответ дать мДж, округлив до целых.
3) во сколько раз изменилась скорость шайбы при ударе о плиту?

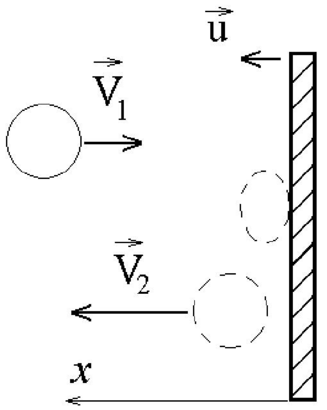


Рис. A

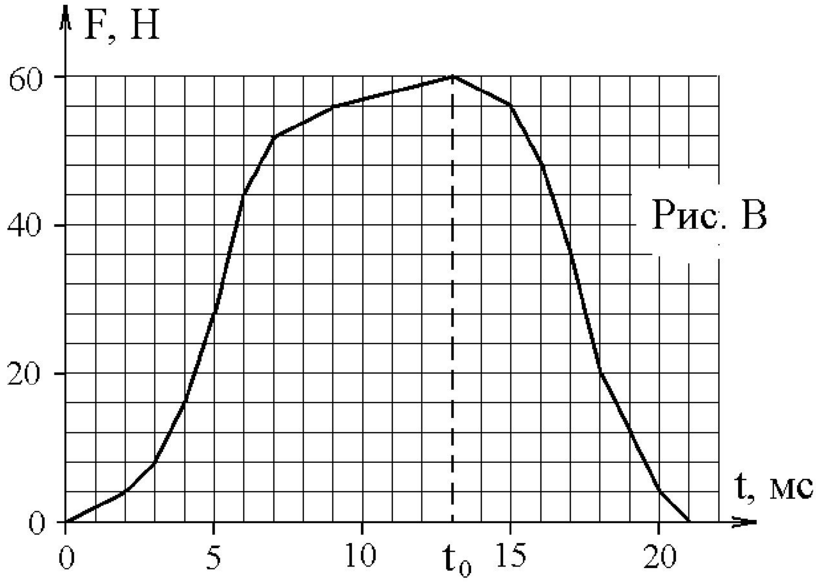


Рис. B

Решение:

Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 13 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к плите максимально и остановилась относительно плиты.

Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с плитой, изменением скорости которой можно пренебречь из-за массивности плиты. В этой системе отсчета скорость приближения шайбы к плите будет равна $V_1 + u$, а скорость удаления от плиты $V_2 - u$. Кроме того в любой инерциальной системе координат график зависимости силы от времени будет такой же.

Используем понятие импульса силы $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, разбив интервал времени взаимодействия на очень малые промежутки времени Δt. Но $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$.

Найдем площади под графиком в интервале от 0 до t_0=13 мс и от t_0 до 21 мс.

S_1 = 0,468 Н·с; S_2 = 0,264 Н·с.

С другой стороны эти площади равны изменению проекции импульсов на этих интервалах времени в инерциальной системе отсчета:

$$\Delta p'_{1x} = 0 - \left(-p'_{1x}\right) = p'_{1x} = m\left(V_1 + u\right) \qquad \Delta p'_{2x} = p'_{2x} - 0 = p'_{2x} = m\left(V_2 - u\right)$$

В системе отсчета, где плита покоится, она не совершает работу. Тепло, выделившееся при этом

$$Q = \frac{p_1'^2}{2m} - \frac{p_2'^2}{2m} = \frac{0,468^2}{2 \cdot 0,5} - \frac{0,264^2}{2 \cdot 0,5} \approx 0,149 \text{ Дж}$$

В системе отсчета, связанной с неподвижным полом, сила давления на шайбу совершает над ней работу, равну: $A = \sum F_x \Delta x = \sum F_x \cdot u \Delta t = u \sum F_x \Delta t = u\left(S_1 + S_2\right) = 0,3 \cdot \left(0,468 + 0,264\right) = 0,2196$ Дж $\approx$ 220 мДж

Скорость шайбы до удара $V_1 = \dfrac{p_1'}{m} - u = \dfrac{0,468}{0,5} - 0,3 = 0,636$ м/с

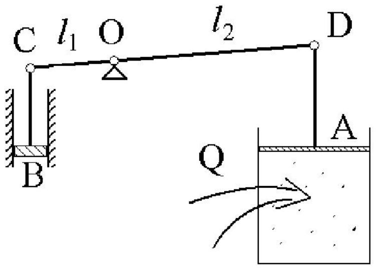
Скорость шайбы после удара $V_2 = \dfrac{p_2'}{m} + u = \dfrac{0,264}{0,5} + 0,3 = 0,828$ м/с

Скорость увеличилась в $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{0,828}{0,636} = 1,3$ раза

	Критерии оценки	Балл
1	Показано: *Чем больше деформация шайбы, тем больше сила давления, следовательно, в момент времени t_0 = 13 мс шайба была деформирована максимально, то есть приблизилась к стене максимально и остановилась.*	2
2	Из второго закона Ньютона получено выражение для изменения импульса $\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t$	2

3	Так как сила переменная, за равные промежутки времени импульс меняется не равномерно и суммарное изменение импульса $\Delta p_x = \sum F_x \cdot \Delta t$, а $\sum F_x \cdot \Delta t$ есть площадь под графиком $F_x(t)$	2
4	Найдены площади под графиком в интервале от 0 до t_0=13 мс и от t_0 до 21 мс. S_1 = 0,468 Н·с; S_2 = 0,264 Н·с.	2
5	. В инерциальной системе отсчета связанной с плитой, скорость приближения шайбы к плите будет равна $V_1 + u$, а скорость удаления от плиты $V_2 - u$. Найдены конечная и начальная скорость $V_1 = \frac{\Delta p_1}{m} - u = \frac{S_1}{m} - u = 0.636\, м/с$; $V_2 = \frac{\Delta p_2}{m} + u = \frac{S_2}{m} + u = 0.828\, м/с$	4
6	Тепло выделившееся при ударе: $Q = \frac{p_1^2}{m} - \frac{p_2^2}{m} = \frac{S_1^2 - S_2^2}{m}$	2
7	Найдена работа над шайбой $A = \sum F_x \Delta x = \sum F_x \cdot u \Delta t = u \sum F_x \Delta t = u(S_1 + S_2) = 0,3 \cdot (0,468 + 0,264) = 0,2196$ Дж	3
8	Дан ответ на вопрос задачи – скорость **увеличилась** в 1,3 раза	1
9	Дан ответ на вопрос задачи – тепло выделившееся при ударе Q=149мДж	1
10	Дан ответ на вопрос задачи –работа силы давления над шайбой при ударе A=220 мДж	1

Термодинамика



3.1. В горизонтальной трубе застряла пробка, которую надо вытащить. Юный экспериментатор Андрей выяснил, что для того, чтобы вытолкнуть пробку, необходимо приложить постоянную минимальную силу $F = 200$ Н вдоль оси трубы. Ему показалось это слишком трудным, и он решил создать установку для выталкивания пробок. Для этого он использовал горизонтальный цилиндр с поршнем А сечением $S_A = 10$ см^2 с гладкими стенками и жесткий рычаг CD, который мог вращаться без трения вокруг закрепленного шарнира O в горизонтальной плоскости. Точка O делила рычаг CD в соотношении $l_1 : l_2 = 1 : 2$. После подсоединения стержней AD и CB к шарнирам D и C в сосуде был воздух при атмосферном давлении $P_0 = 10^5$ Па и занимал объем V = 3 л, а стержни AD и CB параллельны. Далее Андрей подал с помощью нагревателя тепло Q = 757 Дж, и пробка, переместившись на некоторое расстояние Δx, выскочила из трубы.

1) Найти КПД такой установки, округлив результат до сотых процента.

2) Предложите Андрею способы увеличения КПД. Обоснуйте.

Примечание: воздух – в основном двухатомный газ (78% азота и 21% кислорода), который можно считать идеальным при давлениях, не очень сильно превышающих атмосферное. Для двухатомного идеального газа внутренняя энергия вычисляется по формуле $U = \frac{5}{2} \nu RT$

Решение:

1) Сначала надо выяснить, какой избыток давления в цилиндре должен быть, чтобы пробка сдвинулась с места. Пусть сила, действующая на поршень B со стороны стержня CB равна $F_B = F$ =200 Н. Тогда на поршень A будет действовать сила F_A со стороны стержня DA. По закону моментов сил:

$$F_A \cdot l_2 = F_B \cdot l_1 \Rightarrow F_A = F_B \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2} F_B = \frac{1}{2} F = 100 \text{ Н} \qquad \Delta P = P - P_0 = \frac{F_A}{S_A} = \frac{100}{10 \cdot 10^{-4}} = 10^5 \text{ Па.}$$

Таким образом, для того, чтобы пробка смогла сдвинуться, надо нагреть воздух в цилиндре **изохорически** и довести его давление до значения $P = P_0 + \Delta P = 2\cdot 10^5$ Па.

На это потребуется количество тепла $Q_1 = \Delta U = \frac{5}{2}\Delta\left(PV\right) = \frac{5}{2}V\Delta P = \frac{5}{2}\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 10^5 = 750$ Дж.

Затем осуществляется **изобарическое** расширение газа при $P = 2\cdot 10^5$ Па, при этом поршень А должен переместиться на расстояние $\Delta x_A = \frac{l_2}{l_1}\cdot\Delta x_B = 2\Delta x$.

На этом этапе был подведен остаток тепла $Q_2 = Q - Q_1 = 7$ Дж

$$Q_2 = \frac{5}{2}P\Delta V + P\Delta V = \frac{7}{2}P\Delta V = \frac{7}{2}P\cdot S_A\cdot 2\Delta x \quad\Rightarrow\quad \Delta x = \frac{Q_2}{7PS_A} = \frac{7}{7\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^{-4}} = 0{,}005 \text{ м}$$

Таким образом, пробка переместилась на 5 мм, при этом была совершена работа

$A = F\cdot\Delta x = 200\cdot 0{,}005 = 1$ Дж. Это полезная работа. КПД равен $\eta = \frac{A}{Q}\cdot 100\% = \frac{1}{757}\cdot 100\% = 0{,}13\%$

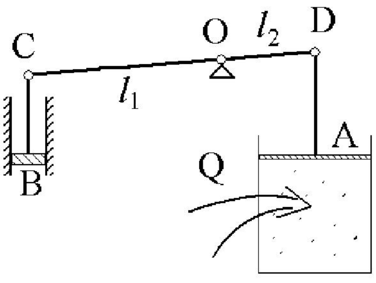
2) Полезную работу изменить нельзя, так как она зависит от трения в трубе с пробкой, а на это повлиять нельзя. Зато можно уменьшить полученное тепло Q.

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{5}{2}V\Delta P + \frac{7}{2}PS_A\Delta x_A = \frac{5}{2}V\frac{F_A}{S_A} + \frac{7}{2}\left(P_0 + \frac{F_A}{S_A}\right)S_A\Delta x_A = \frac{5}{2}V\frac{l_1}{l_2}\frac{F}{S_A} + \frac{7}{2}\left(P_0S_A + \frac{l_1}{l_2}F\right)\frac{l_2}{l_1}\Delta x = \frac{5}{2}V\frac{l_1}{l_2}\frac{F}{S_A} + \frac{7}{2}\left(\frac{l_2}{l_1}P_0S_A + F\right)\Delta x$$

1) можно уменьшить начальный объем воздуха

2) Можно изменить соотношение $\frac{l_2S_A}{l_1} = \alpha$, но необходимо исследовать зависимость теплоты от α, так как в одном слагаемом α стоит в знаменателе, а в другом – в числителе.

	Критерии оценки	Балл
1	Записано уравнение моментов и определена сила, действующая на поршень F_A=100 Н.	2
2	Определено избыточное давление, которое надо создать, чтобы вытолкнуть пробку. $\Delta p = p - p_0 = \frac{F}{S} = 10^5$ *Па* ($p = 2\cdot 10^5$ *Па*)	2
3	Определено количество тепла, необходимое для достижения такого давления в **изохорном процессе** $Q = \Delta U = 750$ *Дж*	4
4	По достижении такого давления начинается извлечение пробки при **изобарном расширении** газа в котором расходуется оставшееся количество тепла. $Q = \frac{7}{2}p\Delta V = 7$ *Дж*, что позволяет найти $\Delta V = 10^{-5}$ $м^3$	4
5	При смещении пробки на Δx поршень должен сместиться на $2\Delta x$ (правило рычага), изменение объема при этом равно $\Delta V = S\cdot 2\cdot\Delta x$, что позволяет найти $\Delta x = 0{,}005$ *м*	2
6	Определена полезная работа $A = F\cdot\Delta x = F_A\cdot 2\cdot\Delta x = 1$ *Дж*	2
7	Вычислен КПД 0,13%.	1
8	Предложены и обоснованы способы повышения КПД	3



3.2. В горизонтальной трубе застряла пробка, которую надо вытащить. Юный экспериментатор Андрей выяснил, что для того, чтобы вытолкнуть пробку, необходимо приложить постоянную минимальную силу $F = 200$ Н вдоль оси трубы. Ему показалось это слишком трудным, и он решил создать установку для выталкивания пробок. Для этого он использовал горизонтальный цилиндр с поршнем А сечением S_A = 100 см^2 с гладкими стенками и жесткий рычаг CD, который мог вращаться без трения вокруг закрепленного шарнира О в горизонтальной плоскости. Точка О делила рычаг CD в соотношении $l_1 : l_2 = 2:1$. После подсоединения стержней AD и CB к шарнирам D и C в сосуде был воздух при атмосферном давлении $P_0 = 10^5$ Па, а стержни AD и CB параллельны. Далее Андрей подал с помощью нагревателя некоторое тепло Q, и пробка, переместившись на расстояние Δx = 4 мм, выскочила из трубы.

1) Найти первоначальный объем воздуха в цилиндре , если КПД такой установки оказался равен 1%.

2) Предложите Андрею способы увеличения КПД. Обоснуйте.

Примечание: воздух – в основном двухатомный газ (78% азота и 21% кислорода), который можно считать идеальным при давлениях, не очень сильно превышающих атмосферное. Для двухатомного идеального газа внутренняя энергия вычисляется по формуле $U = \frac{5}{2}\nu RT$

Решение:

1) Сначала надо выяснить, какой избыток давления в цилиндре должен быть, чтобы пробка сдвинулась с места. Пусть сила, действующая на поршень В со стороны стержня СВ равна $F_B = F$ =100 Н. Тогда на поршень А будет действовать сила F_A со стороны стержня DA. По закону моментов сил:

$$F_A \cdot l_2 = F_B \cdot l_1 \Rightarrow F_A = F_B \frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{1} F_B = 2F = 400 \text{ Н} \qquad \Delta P = P - P_0 = \frac{F_A}{S_A} = \frac{400}{100 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Таким образом, для того, чтобы пробка смогла сдвинуться, надо нагреть воздух в цилиндре **изохорически** и довести его давление до значения $P = P_0 + \Delta P = 1,4 \cdot 10^5$ Па.

На это потребуется количество тепла $Q_1 = \Delta U = \frac{5}{2}\Delta(PV) = \frac{5}{2} V\Delta P = \frac{5}{2} \cdot V \cdot 1,4 \cdot 10^5 = 3,5 \cdot 10^5 V$.

Затем осуществляется **изобарическое** расширение газа при $P = 1,4 \cdot 10^5$ Па, при этом поршень А должен переместиться на расстояние $\Delta x_A = \frac{l_2}{l_1} \cdot \Delta x_B = \frac{1}{2}\Delta x$.

На этом этапе изобарического расширения был подведен остаток тепла

$$Q_2 = \frac{5}{2} P\Delta V + P\Delta V = \frac{7}{2} P\Delta V = \frac{7}{2} P \cdot S_A \cdot \frac{\Delta x}{2} = \frac{7}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4}{2} \cdot 10^{-3} = 9,8 \text{ Дж}$$

Полезная работа по выталкиванию пробки равна $A = F \cdot \Delta x = 200 \cdot 0,004 = 0,8$ Дж. Зная КПД найдем полное тепло $Q_1+Q_2 = Q = \frac{A}{\eta} = \frac{0,8}{0,01} = 80$ Дж. Отсюда найдем $Q_1 = Q - Q_2 = 80 - 9,8 = 70,2$ Дж

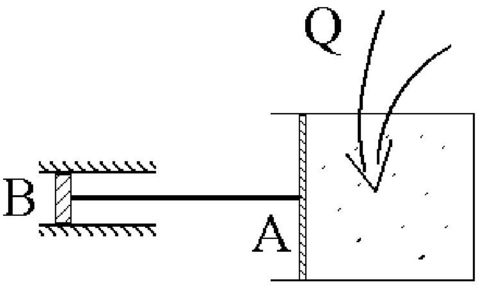
Осталось найти объем $V = \frac{Q_1}{3,5 \cdot 10^5} = \frac{70,2}{3,5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3 или 0,2 л.

2) Полезную работу изменить нельзя, так как она зависит от трения в трубе с пробкой, а на это повлиять нельзя. Зато можно уменьшить полученное тепло Q.

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{5}{2} V\Delta P + \frac{7}{2} PS_A \Delta x_A = \frac{5}{2} V \frac{F_A}{S_A} + \frac{7}{2}\left(P_0 + \frac{F_A}{S_A}\right) S_A \Delta x_A = \frac{5}{2} V \frac{l_1}{l_2}\frac{F}{S_A} + \frac{7}{2}\left(P_0 S_A + \frac{l_1}{l_2} F\right)\frac{l_2}{l_1}\Delta x = \frac{5}{2} V \frac{l_1}{l_2}\frac{F}{S_A} + \frac{7}{2}\left(\frac{l_2}{l_1} P_0 S_A + F\right)\Delta x$$

1) можно уменьшить начальный объем воздуха 2) Можно изменить соотношение $\frac{l_2 S_A}{l_1} = \alpha$, но необходимо исследовать зависимость теплоты от α, так как в одном слагаемом α стоит в знаменателе, а в другом – в числителе.

	Критерии оценки	Балл
1	Записано уравнение моментов и определена сила, действующая на поршень F_A=400 Н.	2
2	Определено избыточное давление, которое надо создать чтобы вытолкнуть пробку. $\Delta p = p - p_0 = \frac{F_A}{S} = 4\cdot 10^4\ Па$ ($p = 1{,}4\cdot 10^5 Па$)	2
3	Определено количество тепла, необходимое для достижения такого давления в **изохорном процессе** $Q_1 = \Delta U = 3{,}5\cdot 10^5 V$	3
4	При смещении пробки на Δx поршень должен сместиться на $0.5\Delta x$ (правило рычага), что позволяет найти изменение объема $\Delta V = S_A\cdot 0.5\Delta x = 2\cdot 10^{-5} м^3$	2
5	По достижении такого давления начинается извлечение пробки при **изобарном расширении** газа в котором расходуется оставшееся количество тепла. $Q_2 = \frac{7}{2} p\Delta V = 9{,}8 Дж$	2
6	Определена полезная работа $A = F\cdot\Delta x = F_A\cdot 0{,}5\cdot\Delta x = 0{,}8 Дж$	2
7	Определено тепло, необходимое для нагрева газа и извлечения пробки $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{A\cdot 100\%}{\eta} = 80 Дж$, и найдено $Q_1 = 70{,}2 Дж$	3
8	Определен первоначальный объем воздуха – 0,2 литра	1
9	Предложены и обоснованы способы повышения КПД	3



3.3. В горизонтальной трубе застряла пробка, которую надо вытащить. Юный экспериментатор Андрей выяснил, что для того, чтобы вытолкнуть пробку, необходимо приложить постоянную минимальную силу $F = 200$ Н вдоль оси трубы. Ему показалось это слишком трудным, и он решил создать установку для выталкивания пробок. Для этого он использовал горизонтальный цилиндр с поршнем А сечением S_A с гладкими стенками. После подсоединения стержня АВ в сосуде был воздух при атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па и занимал объем V = 1 л, а стержень АВ параллелен оси трубы и перпендикулярен поршню А. Далее Андрей подал с помощью нагревателя некоторое тепло Q, и пробка, переместившись на расстояние $\Delta x = 10$ мм, выскочила из трубы. Подбирая цилиндры с воздухом одинакового начального объема V = 1 л, но разных сечений S_A, Андрей добился максимального КПД установки.

1) Чему равен этот максимальный КПД? Ответ дать в процентах, округлив до десятых.

2) Чему равна при этом площадь поршня А? Ответ дать в см^2, округлив до целых.

Примечание: воздух – в основном двухатомный газ (78% азота и 21% кислорода), который можно считать идеальным при давлениях, не очень сильно превышающих атмосферное. Для двухатомного идеального газа внутренняя энергия вычисляется по формуле $U = \frac{5}{2}\nu RT$

Решение:

1) Чтобы пробка сдвинулась с места, необходимо создать избыток давления в цилиндре: $\Delta P = \frac{F}{S_A}$. Увеличение давления при этом будет проходить изохорически, так как пробка пока не движется. В этом процессе подано тепло: $Q_1 = \Delta U = \frac{5}{2}\Delta(PV) = \frac{5}{2}V\Delta P = \frac{5}{2}V\frac{F}{S_A}$

2) При достижении давления $P = P_0 + \Delta P$ пробка начинает медленно (без ускорения) двигаться, причем давление в цилиндре можно считать постоянным, то есть процесс изобарный. В этом процессе подается тепло:

$Q_2 = \Delta U + A = \frac{5}{2}\Delta(PV) + P\Delta V = \frac{5}{2}P\Delta V + P\Delta V = \frac{7}{2}P\Delta V$. Подставим в эту формулу давление газа $P = P_0 + \frac{F}{S_A}$ и изменение объема $\Delta V = S_A\Delta x$. Таким образом $Q_2 = \frac{7}{2}\left(P_0 + \frac{F}{S_A}\right)S_A\Delta x = \frac{7\Delta x}{2}(P_0 S_A + F)$

Полное тепло, данное воздуху в этих процессах $Q = Q_1 + Q_2$, полезная работа по выталкиванию пробки $A = F\Delta x$, так что КПД равен $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{F\Delta x}{Q(S_A)}$, где $Q(S_A) = \frac{5}{2}V\frac{F}{S_A} + \frac{7\Delta x}{2}(P_0 S_A + F)$ – тепло, как функция от S_A

Как видно из формулы, работа не зависит от выбора цилиндра, а тепло зависит. Найдем площадь S_A, при которой будет минимум теплоты, взяв производную от теплоты по площади и приравняв нулю:

$Q'(S_A) = -\frac{5}{2}\frac{VF}{S_A^2} + \frac{7\Delta x P_0}{2} = 0 \Rightarrow S_A = \sqrt{\frac{5VF}{7\Delta x P_0}} = \sqrt{\frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 200}{7\cdot 10^{-2}\cdot 10^5}}$ =0,011952 м^2 ≈ 120 см^2

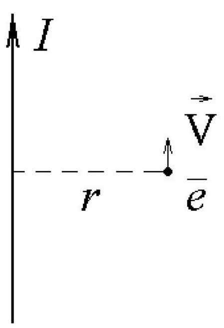
При этом тепло равно $Q = \frac{5}{2}\cdot\frac{10^{-3}\cdot 200}{0,011952} + \frac{7\cdot 10^{-2}}{2}\left(10^5\cdot 0,011952 + 200\right) = 41,8 + 48,8 = 90,6$ Дж, а работа

$A = F\Delta x = 200\cdot 10^{-2} = 2$ Дж

Ответ: При такой площади S_A = 120 см^2 КПД будет равен $\eta = \frac{2}{90,6}\cdot 100\% = 2,2\%$

	Критерии оценки	Балл
1	Определено избыточное давление, которое надо создать, чтобы вытолкнуть пробку. $\Delta p = p - p_0 = \frac{F}{S}$	2
2	Определено количество тепла, необходимое для достижения такого давления в **изохорном процессе** $Q_1 = \Delta U = \frac{5}{2}V\cdot\Delta p = \frac{5}{2}V\cdot\frac{F}{S}$	2
3	По достижении такого давления начинается извлечение пробки при **изобарном расширении** газа в котором расходуется количество тепла. $Q_2 = \frac{7}{2}p\Delta V = \frac{7}{2}(p_0 + \frac{F}{S})\cdot S\cdot\Delta x$	4
4	Количество тепла необходимое для извлечения пробки $Q_1 + Q_2$	1
5	Определена полезная работа $A = F\cdot\Delta x = 2Дж$	2
6	Получена зависимость КПД от площади поршня $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{F\Delta x}{Q(S_A)}$	4
7	Определена площадь поршня, при которой КПД максимально S=120 см^2	3
8	Вычислен КПД 2,2%.	2

Магнетизм

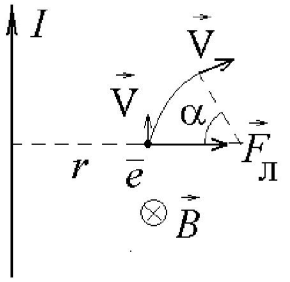


4.1. На расстоянии r = 2 м от бесконечного прямого провода параллельно нему движется электрон со скоростью V = 4,23 м/с. На очень короткое время Δt = 11,25 мкс по проводу пропускают импульс постоянного тока I = 35,7 А в направлении движения электрона. На каком расстоянии от провода окажется электрон через 2 с после окончания импульса тока?

Замечание: бесконечный прямой провод с током создает на расстоянии r от себя индукцию магнитного поля $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, Принять π = 3,14, масса электрона $m = 9,1\cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл

Решение:

Найдем индукцию магнитного поля провода на расстоянии *r*:



$B = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 35,7}{2\pi \cdot 2} = 3,57 \cdot 10^{-6}$ Тл. По правилу правого винта найдем направление индукции: перпендикулярно плоскости рисунка от нас. По правилу левой руки определяем направление силы Лоренца на отрицательную частицу: вправо по рисунку. Электрон будет двигаться по дуге окружности радиусом

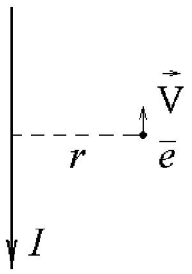
$R = \dfrac{m\text{V}}{\text{q}B} = \dfrac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4,23}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,57 \cdot 10^{-6}} = 6,74 \cdot 10^{-6}$ (м) практически будет находиться на одном месте. Период $T = \dfrac{2\pi R}{\text{V}} = \dfrac{2\pi \cdot m}{qB} = \dfrac{2 \cdot 3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,57 \cdot 10^{-6}} = 10^{-5}$ (с)=10 мкс

За 11,25 мкс электрон сделает один оборот и еще одну восьмую оборота, при этом скорость электрона отклонится на 45° от вертикали. Перпендикулярная проводу составляющая скорости электрона будет равна

$$\text{V}_r = \text{V} \cdot \cos 45° = \dfrac{\text{V}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4,23}{1,41} = 3 \text{ м/с}$$

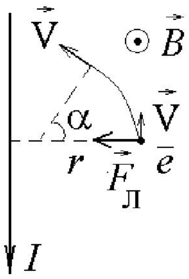
За 2 с электрон станет дальше от провода на $\text{V}_r \cdot t = 3 \cdot 2 = 6$ м, то есть окажется на расстоянии 8 м от провода.

	Критерии оценки	Балл
1	Определена индукция магнитного поля B=3,57мкТл и направление в точке нахождения электрона	3
2	Определен радиус окружности, по которой будет двигаться электрон R=6,74 мкм, сделан вывод о том, что магнитное поле при таком движении по окружности малого радиуса можно считать однородным, и определено направление вращения	3
3	Определен период обращения электрона T=10 мкс	5
4	Показано, что за это время вектор скорости отклонится на 45^0 от вертикали	4
5	Показано что электрон будет удаляться от провода и за две секунды переместится на 6 метров	4
6	Дан ответ на вопрос задачи – электрон окажется на расстоянии 8 метров от провода.	1



4.2. На расстоянии r = 3 м от бесконечного прямого провода параллельно нему движется электрон со скоростью V = 4,23 м/с. На очень короткое время Δt = 62,5 мкс по проводу пропускают импульс постоянного тока I = 26,8 А в направлении, противоположном движению электрона. На каком расстоянии от провода окажется электрон через 1 с после окончания импульса тока?

Замечание: бесконечный прямой провод с током создает на расстоянии *r* от себя индукцию магнитного поля $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, Принять π = 3,14, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл



Решение:

Найдем индукцию магнитного поля провода на расстоянии *r*:

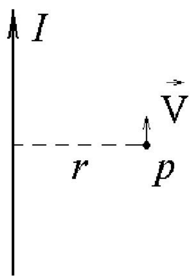
$B = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 26,8}{2\pi \cdot 3} = 1,787 \cdot 10^{-6}$ Тл. По правилу правого винта найдем направление индукции: перпендикулярно плоскости рисунка к нам. По правилу левой руки определяем направление силы Лоренца на отрицательную частицу: влево по рисунку. Электрон будет двигаться по дуге окружности радиусом $R = \frac{mV}{qB} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}23}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}787 \cdot 10^{-6}} = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ (м) (практически будет находиться на одном месте). Период $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi \cdot m}{qB} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}787 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-5}$ (с)=20 мкс

За 62,5 мкс электрон сделает три оборота и еще одну восьмую оборота, при этом скорость электрона отклонится на 45° от вертикали. Перпендикулярная проводу составляющая скорости электрона будет равна

$$V_r = V \cdot \cos 45° = \frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{4{,}23}{1{,}41} = 3 \text{ м/с}$$

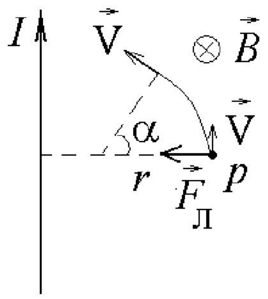
За 1 с электрон станет ближе к проводу на $V_r \cdot t = 3 \cdot 1 = 3$ м, то есть окажется на расстоянии 0 м от провода, столкнется с ним.

	Критерии оценки	Балл
1	Определена индукция магнитного поля B=1,79мкТл и направление в точке нахождения электрона	3
2	Определен радиус окружности, по которой будет двигаться электрон R=13,5 мкм, сделан вывод о том, что магнитное поле при таком движении по окружности малого радиуса можно считать однородным, и определено направление вращения	3
3	Определен период обращения электрона T=20 мкс	5
4	Показано, что за это время вектор скорости отклонится на 45^0 от вертикали	4
5	Показано что электрон будет приближаться к проводу и за одну секунду переместится на 3 метра	4
6	Дан ответ на вопрос задачи – электрон окажется на расстоянии 0 метров от провода, т.е столкнется с ним.	1



4.3. На расстоянии r = 4 м от бесконечного прямого провода параллельно нему движется протон со скоростью V = 3,46 см/с. На очень короткое время Δt = 65 мс по проводу пропускают импульс постоянного тока I = 43,8 А в направлении движения протона. На каком расстоянии от провода окажется протон через 1 мин после окончания импульса тока?
Замечание: бесконечный прямой провод с током создает на расстоянии r от себя индукцию магнитного поля $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, Принять π = 3,14, масса протона $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Решение:



Найдем индукцию магнитного поля провода на расстоянии r:

$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 43{,}8}{2\pi \cdot 4} = 2{,}19 \cdot 10^{-6}$ Тл. По правилу правого винта найдем направление индукции: перпендикулярно плоскости рисунка от нас. По правилу левой руки определяем направление силы Лоренца на положительно заряженную частицу: влево по рисунку. Протон будет двигаться по дуге окружности радиусом

$R = \frac{mV}{qB} = \frac{1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}46 \cdot 10^{-2}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}19 \cdot 10^{-6}} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}$ (м) (практически будет находиться на одном месте). Период $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi \cdot m}{qB} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}19 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{-2}$ (с)=30 мс

За 65 мс протон сделает два оборота и еще одну шестую оборота, при этом скорость протона отклонится на 60° от вертикали. Перпендикулярная проводу составляющая скорости протона будет равна

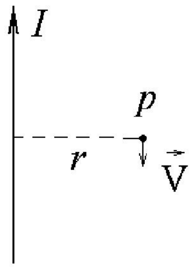
$$V_r = V\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}V = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3,46\cdot 10^{-2} = 0,03 \text{ м/с}$$

За 1 мин протон станет ближе к проводу на $V_r \cdot t = 0,03\cdot 60 = 1,8$ м, то есть окажется на расстоянии 2,2 м от провода.

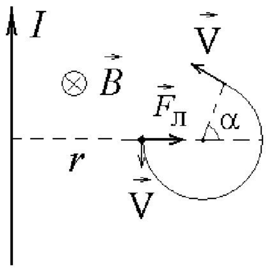
	Критерии оценки	Балл
1	Определена индукция магнитного поля B=2,19мкТл и направление в точке нахождения электрона	3
2	Определен радиус окружности, по которой будет двигаться электрон R=0,165 мм, сделан вывод о том, что магнитное поле при таком движении по окружности малого радиуса можно считать однородным, и определено направление вращения	3
3	Определен период обращения электрона T=30 мс	5
4	Показано, что за это время вектор скорости отклонится на 60^0 от вертикали	4
5	Показано что электрон будет приближаться к проводу и за минуту переместится на 1,8 метр	4
6	Дан ответ на вопрос задачи – электрон окажется на расстоянии 2,2 метра от провода.	1

4.4. На расстоянии r = 5 м от бесконечного прямого провода параллельно нему движется протон со скоростью V = 4,62 см/с. На очень короткое время Δt = 120 мс по проводу пропускают импульс постоянного тока I = 36,5 А в направлении, противоположном движению протона. На каком расстоянии от провода окажется протон через 1 мин после окончания импульса тока?

Замечание: бесконечный прямой провод с током создает на расстоянии r от себя индукцию магнитного поля $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, Принять π = 3,14, масса протона $m = 1,673\cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $e = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл



Решение:



Найдем индукцию магнитного поля провода на расстоянии r:

$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 36,5}{2\pi\cdot 5} = 1,46\cdot 10^{-6}$ Тл. По правилу правого винта найдем направление индукции: перпендикулярно плоскости рисунка от нас. По правилу левой руки определяем направление силы Лоренца на положительно заряженную частицу: вправо по рисунку. Протон будет двигаться по дуге окружности радиусом $R = \frac{mV}{qB} = \frac{1,673\cdot 10^{-27}\cdot 4,62\cdot 10^{-2}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,46\cdot 10^{-6}} = 3,31\cdot 10^{-4}$ (м) (практически будет находиться на одном месте). Период $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi\cdot m}{qB} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 1,673\cdot 10^{-27}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,46\cdot 10^{-6}} = 4,5\cdot 10^{-2}$ (с)=45 мс

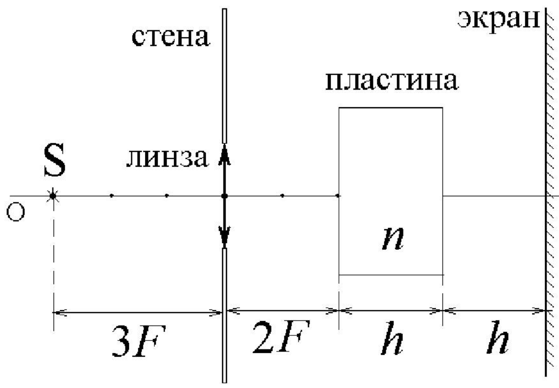
За 120 мс протон сделает два целых и две трети оборота, при этом скорость протона будет направлена под углом 60° к вертикали. Перпендикулярная проводу составляющая скорости протона будет равна

$$V_r = V\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}V = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4,62\cdot 10^{-2} = 0,04 \text{ м/с}$$

За 1 мин электрон станет ближе к проводу на $V_r \cdot t = 0,04\cdot 60 = 2,4$ м, то есть окажется на расстоянии 2,6 м от провода.

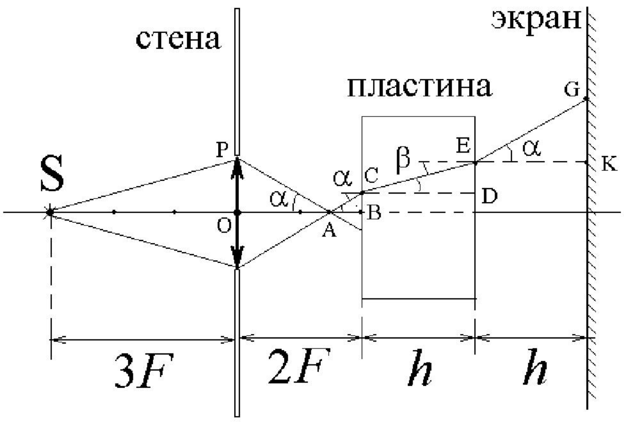
	Критерии оценки	Балл
1	Определена индукция магнитного поля B=1,46мкТл и направление в точке нахождения протона	3
2	Определен радиус окружности, по которой будет двигаться протон R=0,33 мм, сделан вывод о том, что магнитное поле при таком движении по окружности малого радиуса можно считать однородным, и определено направление вращения	3
3	Определен период обращения протона T=45 мс	5
4	Показано, что за это время вектор скорости отклонится на 60^0 от вертикали	4
5	Показано что протон будет приближаться к проводу и за одну минуту переместится на 2,4 метра	4
6	Дан ответ на вопрос задачи – протон окажется на расстоянии 2,6 метра от провода.	1

Оптика



5.1. В непрозрачной стене сделано маленькое круглое отверстие диаметром d = 3 см, в которое вставлена собирающая линза такого же диаметра с оптической силой D = 1 дптр. На расстоянии трех фокусных расстояний от центра линзы на главной оптической оси разместили точечный источник света S, освещающий линзу. За линзой на двойном фокусном расстоянии расположена стеклянная плоскопараллельная пластина с показателем преломления n = 1,5 и толщиной h = 30 см, а за ней на расстоянии h расположен экран. И пластина и экран параллельны стене и плоскости линзы. Найти радиус светлого пятна на экране. При малых углах принять $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$.

Решение:



Фокусное расстояние линзы равно $F = \dfrac{1}{D}$=1 м.

По формуле тонкой линзы определим местоположение изображения источника.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{SO} + \frac{1}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{OA} = \frac{1}{F} - \frac{1}{3F} = \frac{2}{3F} \quad \Rightarrow OA = 1,5F$$

=1,5 м.

Значит $AB = 2F - OA = 0,5F$ =0,5 м.

Из рисунка найдем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{d/2}{1,5F} = \dfrac{0,015}{1,5}$ =0,01.

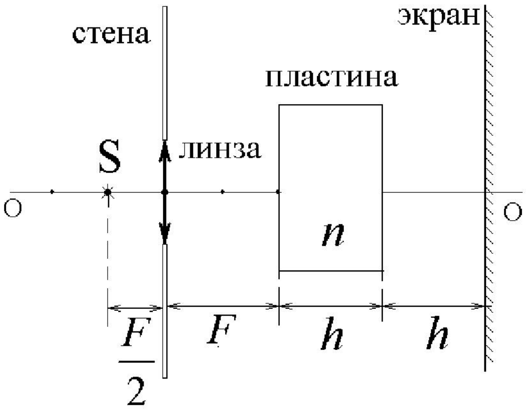
Из закона преломления найдем

$$\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n} = \frac{0,01}{1,5}$$

Радиус пятна на экране

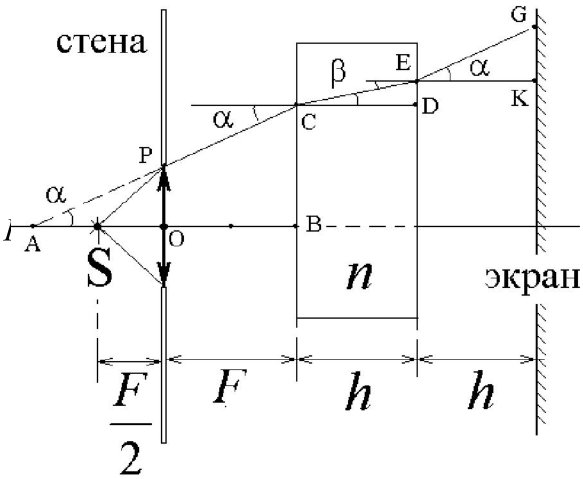
$$R = BC + DE + KG = AB \cdot \operatorname{tg}\alpha + h \cdot \operatorname{tg}\beta + h \cdot \operatorname{tg}\alpha = 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot \frac{0,01}{1,5} + 0,3 \cdot 0,01 = 0,01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

	Критерии оценки	Балл
1	Показан ход лучей после преломления в линзе и пластине, определено положение светлого пятна на экране, записана формула позволяющая вычислить его радиус $R = AB \cdot tg(\alpha) + h \cdot tg(\beta) + h \cdot tg(\alpha)$	6
2	Определено фокусное расстояние линзы $F = \dfrac{1}{D}$=1 м	1
3	По формуле тонкой линзы определено положение изображения источника в линзе 1,5 м от неё, и расстояние от этого изображения до пластины AB=0,5 м	5
4	Из рисунка найден тангенс угла $\alpha : tg\alpha$ =0,01	2
5	Из закона преломления определен тангенс угла β $tg\beta = \dfrac{0{,}01}{1{,}5}$	5
6	Дан ответ на вопрос задачи – радиус пятна на экране – 1 см	1



5.2. В непрозрачной стене сделано маленькое круглое отверстие диаметром d = 2 см, в которое вставлена собирающая линза такого же диаметра с оптической силой D = 0,5 дптр. На расстоянии половины фокусного расстояния от центра линзы на главной оптической оси разместили точечный источник света S, освещающий линзу. За линзой на фокусном расстоянии расположена стеклянная плоскопараллельная пластина с показателем преломления n = 1,5 и толщиной h = 60 см, а за ней на расстоянии h расположен экран. И пластина и экран параллельны стене и плоскости линзы. Найти радиус светлого пятна на экране. При малых углах принять $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha$.

Решение:



Фокусное расстояние линзы равно $F = \dfrac{1}{D}$= 2 м.

По формуле тонкой линзы определим местоположение изображения источника.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{SO} + \frac{1}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{OA} = \frac{1}{F} - \frac{2}{F} = -\frac{1}{F} \quad \Rightarrow |OA| = F$$

=1 м.

Значит $AB = OA + F = 2F$ =4 м.

Из рисунка найдем $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{d/2}{F} = \dfrac{0{,}01}{2}$=0,005.

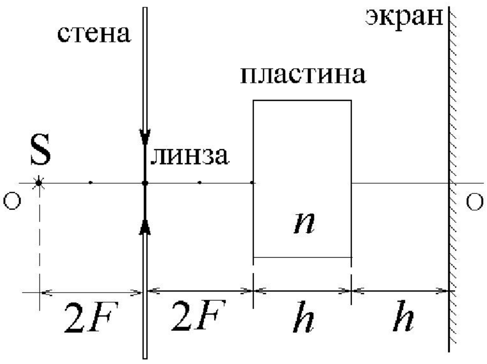
Из закона преломления найдем

$$\mathrm{tg}\,\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{n} = \frac{0{,}005}{1{,}5}$$

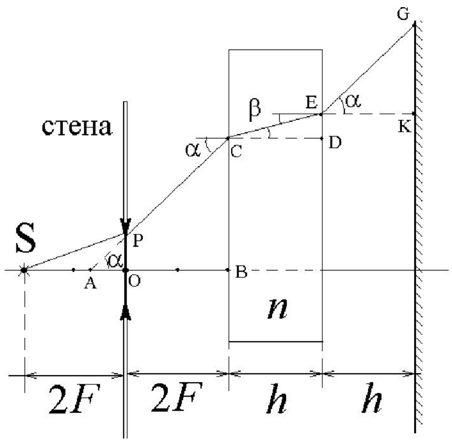
Радиус пятна на экране

$$R = BC + DE + KG = AB \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + h \cdot \mathrm{tg}\,\beta + h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 4 \cdot 0{,}005 + 0{,}6 \cdot \frac{0{,}005}{1{,}5} + 0{,}6 \cdot 0{,}005 = 0{,}025 \text{ м.}$$

	Критерии оценки	Балл
1	Показан ход лучей после преломления в линзе и пластине, определено положение светлого пятна на экране, записана формула позволяющая вычислить его радиус $R = AB \cdot tg(\alpha) + h \cdot tg(\beta) + h \cdot tg(\alpha)$	6
2	Определено фокусное расстояние линзы $F = \frac{1}{D}$ =2 м	1
3	По формуле тонкой линзы определено положение изображения источника в линзе 1 м от неё, и расстояние от этого изображения до пластины АВ=4 м	5
4	Из рисунка найден тангенс угла $\alpha : tg\alpha$ =0,005	2
5	Из закона преломления определен тангенс угла β $tg\beta = \frac{0,005}{1,5}$	5
6	Дан ответ на вопрос задачи – радиус пятна на экране – 2,5 см	1



5.3. В непрозрачной стене сделано маленькое круглое отверстие диаметром d = 4 см, в которое вставлена рассеивающая линза такого же диаметра с оптической силой $D = -\frac{2}{3}$ дптр. На расстоянии двух фокусных расстояний от центра линзы на главной оптической оси разместили точечный источник света S, освещающий линзу. За линзой на двойном фокусном расстоянии расположена стеклянная плоскопараллельная пластина с показателем преломления n = 1,5 и толщиной h = 90 см, а за ней на расстоянии h расположен экран. И пластина и экран параллельны стене и плоскости линзы. Найти радиус светлого пятна на экране. При малых углах принять $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$.



Решение:

Фокусное расстояние линзы равно $F = \frac{1}{D} = -1,5$ м.

По формуле тонкой линзы определим местоположение изображения источника.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{SO} + \frac{1}{OA} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{OA} = \frac{1}{-|F|} - \frac{1}{2|F|} = -\frac{3}{2|F|} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OA| = \frac{2}{3}|F| = 1 \text{ м}$$

Значит $AB = OA + 2|F|$=4 м.

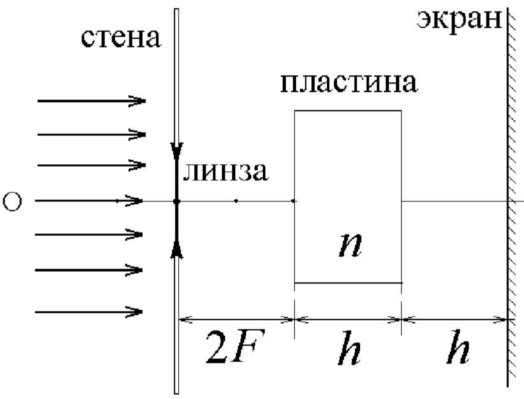
Из рисунка найдем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{d/2}{2|F|/3} = \frac{0,02}{1}$ =0,02.

Из закона преломления найдем $\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n} = \frac{0,02}{1,5}$

Радиус пятна на экране

$$R = BC + DE + KG = AB \cdot \operatorname{tg}\alpha + h \cdot \operatorname{tg}\beta + h \cdot \operatorname{tg}\alpha = 4 \cdot 0,02 + 0,9 \cdot \frac{0,02}{1,5} + 0,9 \cdot 0,02 = 0,11 \text{ м.}$$

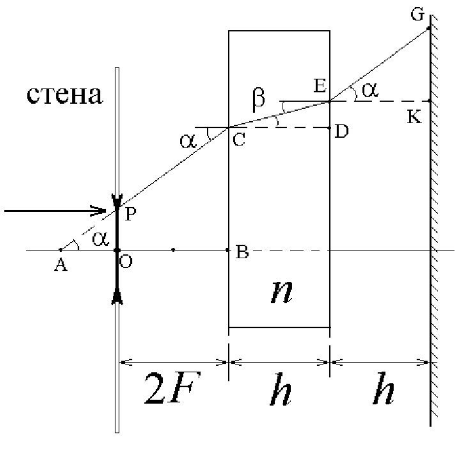
	Критерии оценки	Балл
1	Показан ход лучей после преломления в линзе и пластине, определено положение светлого пятна на экране, записана формула позволяющая вычислить его радиус $R = AB \cdot tg(\alpha) + h \cdot tg(\beta) + h \cdot tg(\alpha)$	6
2	Определено фокусное расстояние линзы $F = \dfrac{1}{D}$=-1,5 м	1
3	По формуле тонкой линзы определено положение изображения источника в линзе 1 м от неё, и расстояние от этого изображения до пластины АВ=4 м	5
4	Из рисунка найден тангенс угла $\alpha : tg\alpha$ =0,02	2
5	Из закона преломления определен тангенс угла β $tg\beta = \dfrac{0{,}02}{1{,}5}$	5
6	Дан ответ на вопрос задачи – радиус пятна на экране – 11 см	1



5.4. В непрозрачной стене сделано маленькое круглое отверстие диаметром d = 6 см, в которое вставлена рассеивающая линза такого же диаметра с оптической силой $D = -\dfrac{1}{3}$ дптр. За линзой на двойном фокусном расстоянии расположена стеклянная плоскопараллельная пластина с показателем преломления n = 1,5 и толщиной h = 120 см, а за ней на расстоянии h расположен экран. И пластина и экран параллельны стене и плоскости линзы. Линзу освещают параллельным главной оптической оси широким пучком света. Найти радиус светлого пятна на экране. При малых углах принять $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$.

Решение:

Фокусное расстояние линзы равно $F = \dfrac{1}{D} = -3$ м.



Параллельный пучок света, пройдя через рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси, далее рассеивается так, как будто лучи выходят из мнимого фокуса слева от линзы из точки А, т.е. $OA = |F|$ = 3 м

Таким образом $AB = OA + 2|F|$=9 м.

Из рисунка найдем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{d/2}{|F|} = \dfrac{0{,}03}{3}$ =0,01.

Из закона преломления найдем $\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n} \approx \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{n} = \dfrac{0{,}01}{1{,}5}$

Радиус пятна на экране

$$R = AB \cdot tg(\alpha) + h \cdot tg(\beta) + h \cdot tg(\alpha) = 9 \cdot 0{,}01 + 1{,}2 \cdot \frac{0{,}01}{1{,}5} + 1{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}114$$

	Критерии оценки	Балл
1	Показан ход лучей после преломления в линзе и пластине, определено положение светлого пятна на экране, записана формула позволяющая вычислить его радиус $R = AB \cdot tg(\alpha) + h \cdot tg(\beta) + h \cdot tg(\alpha)$	6
2	Определено фокусное расстояние линзы $F = \frac{1}{D}$=-3 м	1
3	По формуле тонкой линзы определено положение изображения источника в линзе 3 м слева от неё, и расстояние от этого изображения до пластины AB=9 м	5
4	Из рисунка найден тангенс угла $\alpha : tg\alpha$ =0,01	2
5	Из закона преломления определен тангенс угла β $tg\beta = \frac{0,01}{1,5}$	5
6	Дан ответ на вопрос задачи – радиус пятна на экране – 11 см	1