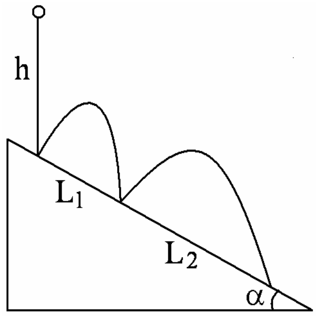
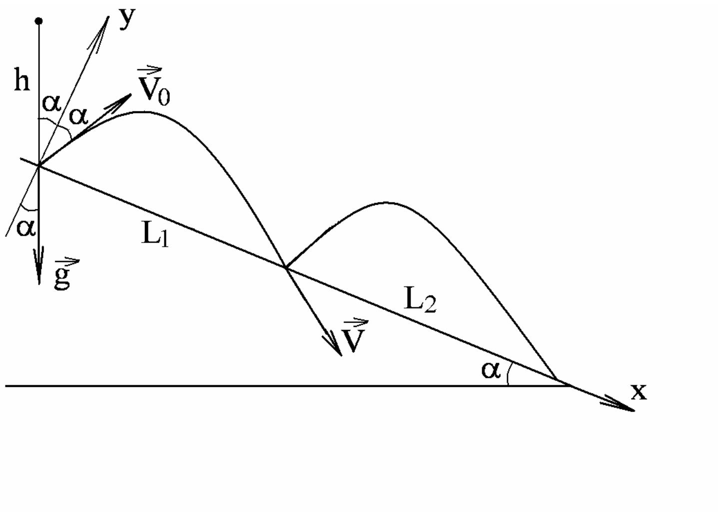
10 КЛАСС



Задача 1

Шарик свободно падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Найти отношение расстояний между точками, в которых шарик касается наклонной плоскости (L_2 / L_1). Соударения шарика с наклонной плоскостью считать абсолютно упругими.

Решение:



Из закона сохранения энергии мжно найти скорость шарика перед ударом $\mathrm{mgh} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}$, $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$.

Такая же скорость будет после первого удара.

Запишем уравнение кинематики в проекции на координатные оси

OX: $L_1 = \upsilon_0 \sin\alpha\, t_1 + \frac{g \sin\alpha\, t_1^2}{2}$, (1)

OY: $0 = \upsilon_0 \cos\alpha\, t_1 - \frac{g\cos\alpha\, t_1^2}{2}$. (2)

Из (2) находим время до второго удара $t_1 = \frac{2\upsilon_0}{g}$ и ставим в (1). Получим $L_1 = \frac{4\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g}$ (3).

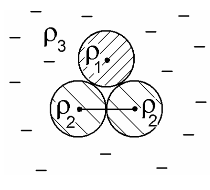
Проекции скорости в точке падения $\begin{array}{l} \upsilon_y = \upsilon_0 \cos\alpha - g\cos\alpha\ t_1 = -\upsilon_0\cos\alpha \\ \upsilon_x = \upsilon_0 \sin\alpha + g \sin\alpha\, t_1 = 3\upsilon_0 \sin\alpha \end{array}$

После удара проекция на ось y будет положительна, на ось x не изменится.

После второго удара:

OX: $L_2 = \upsilon_x t_2 + \frac{g\sin\alpha\, t_2^2}{2}$, (4) OY: $0 = \upsilon_y t_2 - \frac{g\cos\alpha\, t_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{2\upsilon_0}{g}$. Ставим это время в уравнение (4) и получаем $L_2 = \frac{8\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g}$. Тогда $\frac{L_2}{L_1} = 2$.

Задача 2



Два одинаковых цилиндра скреплены так, что их оси лежат в горизонтальной плоскости. Сверху на них лежит такой же цилиндр и вся система плавает, погруженная в жидкость с плотностью $\rho_3 = 800$ кг/м^3. Найти плотность материала ρ_2, из которого сделаны нижние цилиндры, если верхний цилиндр имеет плотность $\rho_1 = 1200$ кг/м^3.

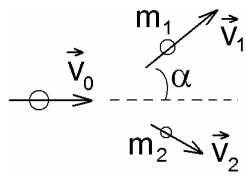
Решение:

$g(m_1+m_2+m_3)=F_A$; $\quad gV(\rho_1+2\rho_2)=3g\rho_3V$; $\quad (\rho_1+2\rho_2)=3\rho_3$

$$\rho_2=\frac{3\rho_3-\rho_1}{2}=\frac{3\cdot 800-1200}{2}=600(кг/м^3)$$

Задача 3

Ракета, летевшая со скоростью $v_0=480$ м/с, разорвалась на два осколка, отношение масс которых $m_1/m_2=4$. Осколок с большей массой летит после разрыва со скоростью $v_1=600$ м/с под углом $\alpha=60^o$ к первоначальному направлению движения ракеты. Найти величину скорости v_2 второго осколка сразу после разрыва.



Решение:

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на координатные оси

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2)\upsilon_0&=m_1\upsilon_1\cos\alpha+m_2\upsilon_2\cos\beta\\ m_1\upsilon_1\sin\alpha-m_2\upsilon_2\sin\beta&=0\end{aligned}\right\}\text{ учтем, что } m_1=4m_2. \qquad \left.\begin{aligned}5\upsilon_0-4\upsilon_1\cos\alpha&=\upsilon_2\cos\beta\\ 4\upsilon_1\sin\alpha&=\upsilon_2\sin\beta\end{aligned}\right\}$$

$$(5\upsilon_0-4\upsilon_1\cos\alpha)^2+(4\upsilon_1\sin\alpha)^2=\upsilon_2^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta).$$

Отсюда скорость второго осколка $\upsilon_2=\sqrt{(5\upsilon_0-4\upsilon_1\cos\alpha)^2+(4\upsilon_1\sin\alpha)^2}$.

$$\upsilon_2=\sqrt{(5\cdot 480-4\cdot 0,5\cdot 600)^2+(4\cdot 600\cdot 0,866)^2}=2400 \quad (м/с).$$

Задача 4

Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. При смещении точки от положения равновесия на 2,4 см скорость точки $\upsilon_1=3см/с$, а при смещении на 2,8 см её скорость $\upsilon_2=2см/с$. Найти амплитуду и период этого колебания.

Решение:

Запишем уравнения гармонических колебаний для двух моментов времени. Учтём, что скорость $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$. Получим

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A\cos\omega t_1\\ \upsilon_1&=-A\omega\sin\omega t_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(x_1^2\right)+\left(\frac{\upsilon_1}{\omega}\right)^2=A^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=A^2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}x_2&=A\cos\omega t_2\\ \upsilon_2&=-A\omega\sin\omega t_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(x_2^2\right)+\left(\frac{\upsilon_2}{\omega}\right)^2=A^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=A^2 \quad (2)$$

Приравнивая правые части (1) и (2), получим $x_1^2+\dfrac{\upsilon_1^2}{\omega^2}=x_2^2+\dfrac{\upsilon_2^2}{\omega^2}$; $\quad (x_2^2-x_1^2)\omega^2=\upsilon_1^2-\upsilon_2^2$.

Отсюда циклическая частота $\omega=\sqrt{\dfrac{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}{x_2^2-x_1^2}}$. Период $T=2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2-x_1^2}{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}}=4,1c$.

Амплитуда $A=\sqrt{x_1^2+\left(\dfrac{\upsilon_1}{\omega}\right)^2}=3{,}1\ \ (см)$.

Задача 5

ЭДС батареи $\varepsilon=12$ В, сила тока короткого замыкания $I_0=5A$. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ может дать батарея во внешней цепи?

Решение:

Мощность $P=I^2R=\dfrac{\varepsilon^2R}{(r+R)^2}$. Максимум найдем из условия $\dfrac{dP}{dR}=0$. Получим, что мощность максимальна при $R=r$ и равна $P_{\max}=\dfrac{\varepsilon^2}{4r}$. Ток короткого замыкания будет при $R=0$ и равен $I_0=\dfrac{\varepsilon}{r}\quad\Rightarrow\quad r=\dfrac{\varepsilon}{I_0}$. Тогда $P_{\max}=\dfrac{\varepsilon I_0}{4}=\dfrac{12\cdot 5}{4}=15$ Вт.