



Задачи для 9 класса

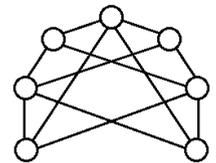
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (О. А. Пяйве)

2. Средняя линия разрезает треугольник на две части — треугольник и трапецию. В этой трапеции также проведена средняя линия. В результате исходный треугольник разрезан на три части — треугольник и две трапеции. Докажите, что если две из этих трёх частей имеют целые площади, то площадь третьей части тоже равна целому числу. (А. А. Теслер)

3. Семь кружков соединены отрезками, как показано на рисунке. У Амира есть три карандаша — красный, зелёный и синий. Он хочет закрасить каждый кружок одним из карандашей, причём никакие два кружка, соединённые отрезком, не должны быть одного цвета. Сколькими способами он может это сделать? (А. Р. Араб)



4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CF . На ней отмечена точка O так, что $FO \cdot FC = FB^2$. BO пересекает AC в точке E . Докажите, что $FB = FE$. (О. А. Пяйве)

5. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Укажите все возможные значения суммы Пашиных чисел. (П. Д. Муленко)

6. В классе учатся 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (К. А. Кноп)

7. Пусть даны натуральные числа a , b , x и y , причём $a < b$, $x < a(a + b)$ и $y < a(a + b)$. Будем называть четвёрку чисел (a, b, x, y) странной, если x делится на a , y делится на b , $x + y$ делится на $a + b$, но $x - y$ не делится на $a - b$.

а) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b взаимно просты?

б) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b не взаимно просты?

(О. А. Пяйве)

8. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? (И. М. Туманова)

