Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 11 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

---

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране? (*А. А. Теслер*)

2. Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой. (*О. А. Пяйве*)

3. Найдите все вещественные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$
(*А. Б. Владимиров*)

4. Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$, где $a \neq 0$ и b — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это? (*А. А. Теслер*)

5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится? (*А. А. Теслер*)

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)