




Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (О. А. Пяйве)
2. Найдите все такие квадратные трёхчлены $f(x)$, что многочлены $f^2(x)$ и $f(x^2)$ имеют одинаковое и непустое множество вещественных корней. (А. А. Солянин)
3. От большого дуба, растущего посреди чистого поля, ровно в полдень отправились в путь три всадника. Первый поскакал на юг со скоростью 20 вёрст в час, второй — на запад со скоростью 30 вёрст в час, третий — на восток со скоростью 40 вёрст в час. Второй и третий в некоторые моменты свернули так, чтобы, поскакав по прямой, встретить первого (продолжавшего движение на юг) в три часа дня. Кто раньше повернул и на сколько минут? (А. А. Теслер по мотивам старинной китайской задачи)
4. В классе учатся 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (К. А. Кноп)
5. Пусть даны натуральные числа a , b , x и y , причём $a < b$, $x < a(a + b)$ и $y < a(a + b)$. Будем называть четвёрку чисел (a, b, x, y) *странной*, если x делится на a , y делится на b , $x + y$ делится на $a + b$, но $x - y$ не делится на $a - b$.
 - а) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b взаимно просты?
 - б) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b не взаимно просты? (О. А. Пяйве)
6. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Сколько существует различных наборов чисел, которые мог написать Паша? (П. Д. Муленко)
7. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? (И. М. Туманова)
8. В окружность радиуса R вписан правильный n -угольник. Точка M движется по окружности, и для каждого её положения рассматривается сумма расстояний от M до прямых, содержащих стороны n -угольника. Для каких положений точки M результат окажется минимальным? (О. А. Пяйве)