



Задачи для 10 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (Л. С. Корешкова)
2. Дан треугольник ABC . O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC . На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D , что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC . M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки D , M , C лежат на одной прямой. (О. А. Пяйве)
3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (В. П. Федотов)
4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

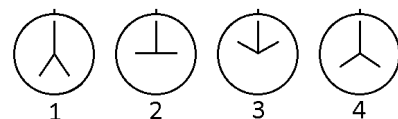
(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

5. Соревнование по бегу на *непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B , после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите *медианное значение* длины этой дуги, то есть такое m , что длина дуги будет превышать m с вероятностью ровно 50%. (А. А. Теслер)
6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Сколько неопределённых фотографий может быть среди них? (А. А. Теслер)