Задачи для 9 класса

1. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

Решение. *Это усложнённая версия задачи 4 для 5 класса.*

Обозначим количество нарциссов x, тогда роз $4x$, а тюльпанов $40x$, значит, всего цветов $45x$. Количество цветов равно произведению числа мальчиков на число девочек. Если мальчиков m, то $m(28-m)$ кратно 45. Оба множителя на 3 делиться не могут, значит, один из них делится на 9, а второй на 5. Единственный вариант — $18 \cdot 10$. Значит, $45x = 180$, то есть $x = 4$, а искомое количество роз $4x = 16$.

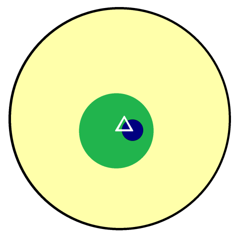
Ответ: 16 роз.

Критерии. Неполное переборное решение — не более 4 баллов.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)

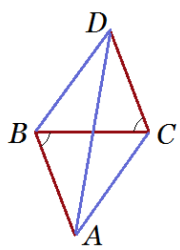
Решение. Да. Например, выберем радиусы кругов так, что их площади равны 1, 11 и 111; а сторону треугольника a сделаем достаточно маленькой (например, $a \leqslant \frac{1}{2}$). Докажем, что меньший круг всегда лежит внутри большего (из этого получится, что площади всех цветных частей правильные).



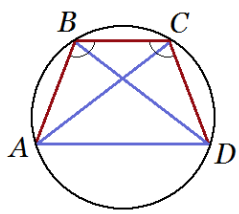
В самом деле, заметим, что радиус даже наименьшего из кругов больше a. Выберем какие-нибудь два круга, и пусть радиус меньшего из них равен r, а большего R; тогда $R > 3r$. Расстояние от центра большего круга до любой точки меньшего не превосходит $a + 2r < 3r < R$, то есть всякая точка меньшего круга лежит внутри большего.

4. На плоскости даны такие четыре точки A, B, C, D, что $AB = BC = CD$, $BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках. (*А. А. Теслер*)

Решение. Углы $\angle ABC$ и $\angle DCB$ равны в силу равенства треугольников ABC и DCB.



а) Если вершины A и D по разные стороны от прямой BC, то эти углы накрест лежащие. Значит, отрезки AB и CD параллельны и равны, и $ABDC$ — параллелограмм. Но тогда каждый его угол острый, поскольку является углом при основании равнобедренного треугольника ($\angle A$ — в треугольнике ABC, $\angle B$ — в $\triangle ABD$). Такое невозможно.

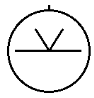


б) Пусть A и D лежат по одну сторону от BC. Расстояния от точек A и D до BC равны, так как $\triangle ABC = \triangle DCB$; значит, $AD \parallel BC$. Получается, что это трапеция с основаниями AD и BC, причём равнобокая (случай $AD = BC$ невозможен, поскольку тогда все шесть отрезков равны, а таких четырёхугольников не бывает). Впишем её в окружность. Пусть, не умаляя общности, $BC < AD$. Дуги AB, BC и CD стянуты равными хордами (и не пересекаются); обозначим градусную меру каждой из них α. Тогда дуга AD равна дуге AC, то есть 2α. Получаем $5\alpha = 360°$, а углы трапеции равны $2\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 3\alpha$ как вписанные.

Ответ: $72°, 72°, 108°, 108°$.

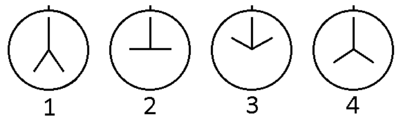
Критерии. 3 балла — доказательство, что это не параллелограмм.
4 балла — разбор случая с трапецией и правильно найденные углы.

5. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них?

(*А. А. Теслер*)

Решение. См. решение задачи 6 для 10 класса.

Вместо последнего абзаца решения задачи 6 для 10 класса достаточно привести какой-нибудь пример с тремя неопределёнными фотографиями и доказать, что их ровно три. Например, такой: пусть первые три фото сделаны в 5:50, 11:40, 17:30, а остальные в промежутке от 20:00 до 23:00. Тогда по виду фотографий можно установить, что первая из них сделана не ранее 5:50, а значит, вторая — не ранее 11:40, а значит, третья — не ранее 17:30, и наконец, остальные после 18:00, где для них остаётся только один вариант, то есть они определённые.

Ответ: 3.

Критерии. 1 балл за приведённый пример, где ровно 3 неопределённых фотографии, +ещё один балл, если доказано, что пример корректен.

1 балл за формулировку утверждения «каждой фотографии соответствует четыре возможных времени: $t, 12-t, 12+t, 24-t$».

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

(*А. Б. Владимиров*)

Решение. Пусть $F(t) = 32t^5 + 48t^3 + 17t - 15$. Тогда система имеет вид $F\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x}$, $F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{y}$, $F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{z}$. Из этого следует, что $F\left(F\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \frac{1}{x}$. Заметим, что $F(0{,}5) = 0{,}5$ и функция $F(t) - t$ строго возрастает. Значит, если $t > 0{,}5$, то $t < F(t) < F(F(t)) < F(F(F(t)))$, и аналогично при $t < 0{,}5 \quad F(t) > F(F(F(t)))$. Но это значит, что $\frac{1}{x} = 0{,}5$, и исходная система имеет единственное решение $x = y = z = 2$.

Критерии. За нахождение решения даётся 1 балл. 3 балла за решение в предположении $x = y = z$. Если не доказана единственность решения у $F(t) = t$, то снимается 2 балла.