Задачи для 8 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$? Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. *(О. А. Пяйве)*

   Решение. Обозначим $n = [\sqrt{x}]$, тогда $[\sqrt{x} + 1] = [\sqrt{x}] + 1 = n + 1$, то есть $x = n(n + 1)$.

   Все числа вида $x = n(n + 1)$ подходят, поскольку для них $n < \sqrt{x} < n + 1$, то есть $[\sqrt{x}]$ действительно равно n.

   Осталось посчитать пятизначные числа такого вида. Заметим, что $99 \cdot 100 < 10\,000 < 100 \cdot 101$, $315 \cdot 316 < 100\,000 < 316 \cdot 317$, то есть x пятизначное при n от 100 до 315 включительно.

Ответ: 216 чисел.

Критерии. Не менее 3 баллов, если участник ищет числа вида $n(n+1)$; не менее 4 баллов, если он нашёл число 315 в качестве «верхней границы».

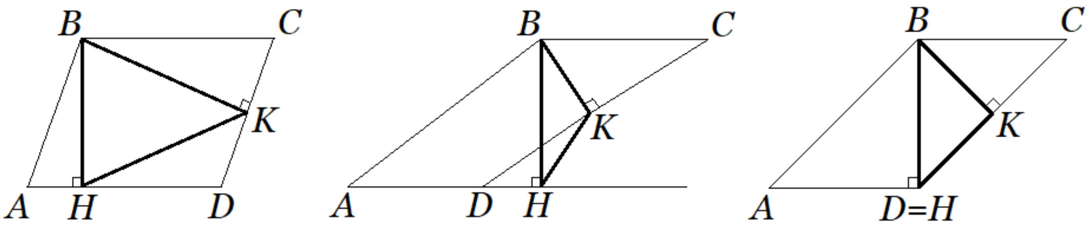
5 баллов — ответ отличается от верного на 1 в любую сторону.

6 баллов — верное решение и ответ, но нечёткое объяснение: например, не доказано (или даже не упомянуто), что все числа вида $n(n+1)$ действительно подходят.

3. В параллелограмме $ABCD$ ($AB \neq BC$) из тупого угла B провели две высоты, BH и BK (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник BHK оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла BAD.
(Л. С. Корешкова)

Решение. Поскольку стороны параллелограмма не равны, то и высоты его не равны (например, исходя из формулы площади), то есть $BH \neq BK$. Это значит, что в треугольнике BHK сторона KH равна одной из двух других. Будем для определённости считать, что $KH = BK$, причём $H \in AD$, $K \in CD$.

Обозначим угол KBH через α (он острый, поскольку в треугольнике BKH таких угла два), тогда $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$, а искомый $\angle BAH = 90^\circ - \angle ABH = \alpha$.



Посмотрим, при каких α точки K и H лежат на сторонах AD и CD. Будем считать, что нам дан $\triangle BKH$ и мы строим по нему параллелограмм. Нужно, чтобы отрезок HK находился внутри прямых углов BKD и BHD, то есть углы $= 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BHK = \alpha$ должны быть острыми. Это выполняется при $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. (На рисунке показано, как будет выглядеть параллелограмм при различных значениях α.)
Кроме того, поскольку $BH \neq BK$, то $\alpha \neq 60^\circ$.

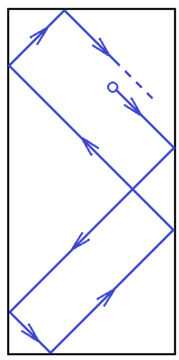
Ответ: любой угол в диапазоне $(45^\circ; 90^\circ)$, кроме 60°.

Критерии. Только верный ответ — 1 балл.
Не исключён угол 60° — минус 1 балл. Не исключены углы, меньшие 45° — минус 2 балла.

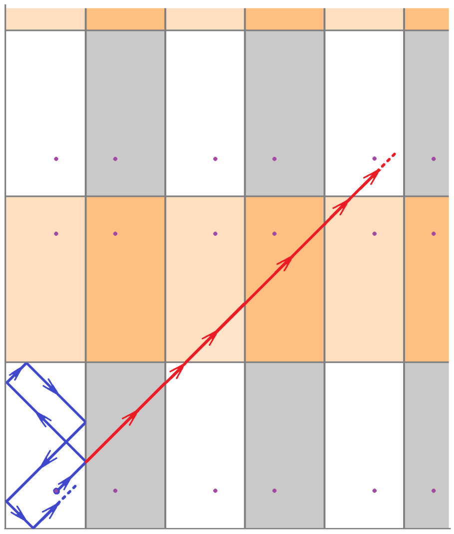
4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. См. задачу 6 для 6 класса.

6. Дан прямоугольник размером 2021×4300. В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол 45° со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом 45°; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.)
а) Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?
б) Допустим, что стартуя в некоторой точке A, шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку A? *(О. А. Пляйве)*



Решение.



Размножим прямоугольник многократными отражениями относительно его сторон. В соседних столбцах (строках) копии прямоугольника будут ориентированы по-разному, но при сдвиге на чётное число столбцов и чётное число строк ориентация совпадёт с изначальной. Теперь можно считать, что, коснувшись бортика, шар переходит в следующую копию прямоугольника, но продолжает идти по той же прямой. Нас интересует момент, когда шар придёт в одну из копий исходной точки.

а) Введём систему координат так, чтобы один из углов доски имел координаты $(0, 0)$, горизонтальная сторона была короче вертикальной, а в начале движения шара обе координаты увеличивались.

Если координаты начальной точки (x_0, y_0), то произвольная точка на пути имеет координаты (x_0+a, y_0+a). Сдвиг на $a = \text{НОК}(2021\cdot 2, 4300\cdot 2)$ по каждой координате приводит нас в копию исходной точки, поскольку мы сдвинулись на чётное количество сторон прямоугольника в каждом направлении.

б) Заметим, что $2021 = 43 \cdot 47$, $4300 = 43 \cdot 100$, поэтому $\text{НОК}(2021 \cdot 2, 4300 \cdot 2) = 2 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 100$. Сдвиг на $a = 2\cdot 43\cdot 47\cdot 100$ по каждой координате соответствует сдвигу на $2\cdot 100$ сторон длины 2021 вправо и на $2 \cdot 47$ сторон длины 4300 вверх. Значит, сдвиг суммарно на 294 прямоугольника вправо и вверх приведёт нас в копию исходной точки. Каждый переход в следующий прямоугольник соответствует одному удару шарика, значит, совпадение произойдёт после 294 ударов.

Заметим, что совпадение с копией исходной точки в прямоугольнике, ориентированном как исходный, не может произойти раньше, поскольку для этого a должно делиться как на $2 \cdot 2021$, так и на $2 \cdot 4300$. Но количество ударов до первого совпадения может оказаться меньше по одной из следующих двух причин:

- траектория проходит через угол (тогда два удара «склеиваются» в один);
- шар попадает в исходную точку в одной из копий, ориентированных *иначе*, чем исходный прямоугольник.

Приведём пример, когда такого не происходит: пусть $x_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{2}$. Через угол траектория не пройдёт, поскольку для этого $x - y$ должно быть целым, в то время как оно всегда равно $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Изучим вопрос о копиях точки в «отражённых» прямоугольниках. Координаты копий исходных точек всегда принимают значения вида $(2021k \pm x_0, 4300l \pm y_0)$, где выбор знаков зависит от чётности k и l, причём в «отражённых» прямоугольниках хотя бы один из знаков — минус. Пусть, например, $x_0 + a = 2021k - x_0$, тогда $(a + 2\sqrt{2})$ — целое число. По второй координате в зависимости от знака получим, что a или $(a + 2\sqrt{3})$ — целое число, но это невозможно.

Ответ: а) да; б) 294 удара.

Критерии. Пункт а — 2 балла пункт, б — 5 баллов. Правильный ответ на пункт б — 1 балл.