# Задачи для 7 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.
2. Можно ли в выражении $A\cdot 5^n + B\cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты $A$, $B$ и $C$ так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном $n$ делился на 8? (*Л. С. Корешкова*)

   **Решение.** Да. Заметим, что $5^n$ даёт остаток 1 при делении на 4, а $3^{n-1}$ всегда нечётное. Поэтому можно взять $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$.

   **Критерии.** Ответ «можно» без пояснения — 0 баллов. Не более одного балла, если один из коэффициентов кратен 8.

   Просто даны верные коэффициенты без пояснения — 3 балла; есть верные коэффициенты и попытка доказательства, что они подходят, не доведённая до конца (например, неполный перебор) — $\approx 5$ баллов.

3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

   **Решение.** *Это усложнённая версия задачи 5 для 5 класса.*

   Странный результат (вдвоём за большее время персонажи успели выполнить меньше работы) объясняется разным временем, затраченным на ходьбу, ведь скорость «совместной» ходьбы равна меньшей из скоростей путников. Во второй раз Валера работал не более чем $2\cdot\frac{8}{11}$ часов, значит, на путь они затратили хотя бы $3-\frac{16}{11}=\frac{17}{11}>1{,}5$ часов. Значит, за полтора часа Ольга не успеет даже дойти до дачи и вернуться.

   **Ответ:** 0 досок.

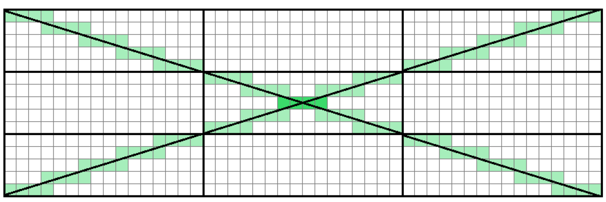
   **Критерии.** Только ответ — 0 баллов.

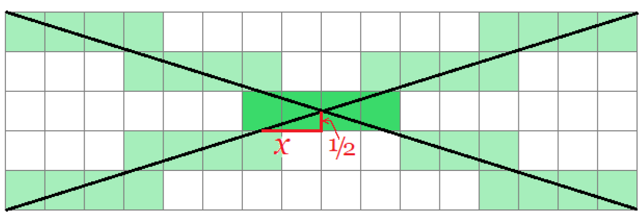
   Оцениваемые продвижения:
   1) Понимание того, что двое идут со скоростью более медленного из них (это сформулировано явно или используется в решении) — 1 балл.
   2) С учётом этого указано, что Ольга тратит на путь более часа (или хотя бы на час больше, чем Валера, или что-то подобное) — ещё +2 балла.
   3) Вычислено, что во втором случае Валера в одиночку справился бы с работой за 16/11 часа (или что он справился бы менее чем за 1,5 часа) — 2 балла (суммируются с продвижениями 1 и 2).

   Например, решение «Во втором случае они шли на 1 час дольше, значит, Ольга тратит на путь на час больше Валеры, значит, в третьем случае у неё будет максимум полчаса на работу, а дальше непонятно что делать» приносит 3 балла (продвижения 1 и 2).
   Решение типа «Во втором случае Валера в одиночку работал бы не более $2\cdot 8/11$ часов, а раз у них ушло больше времени, значит, Ольга мешала; а значит, в одиночку Ольга ничего не покрасит (или покрасит отрицательное количество досок)» приносит 2 балла (только продвижение 3).

4. В клетчатом прямоугольнике $20210\times 1505$ провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)

   **Решение.** *Это усложнённая версия задачи 3 для 5 класса.*





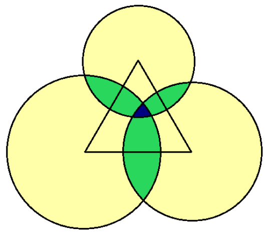
Сначала определим, сколько клеток пересекает одна диагональ. Заметим, что $20210 = 215 \cdot 94, 1505 = 215 \cdot 7$. Значит, диагональ проходит через 215 прямоугольников $94 \times 7$. В каждом из них она пересекает 93 вертикальных и 6 горизонтальных линии сетки (в несовпадающих точках), 99 точек пересечения делят её на 100 отрезков, то есть она пересекает 100 клеток. Всего получается 21500 клеток.

Две диагонали должны бы пересекать 43000 клеток, но среди этих клеток есть совпадающие (вблизи центра прямоугольника), которые посчитаны дважды. Узнаем, сколько их. Большая из координат центра целая, меньшая — полуцелая. Отношение сторон прямоугольника равно $94 : 7$, поэтому $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{94}{7} \in (6; 7)$ (см. рисунок). Значит, общих клеток 14.

**Ответ:** 42986.

**Критерии.** Верно посчитано, сколько клеток пересекает каждая диагональ, но не учитывается, что некоторые из них совпадают, — 3 балла. Если сверх этого учитывается «центр», но неверно — от 4 баллов. Найден НОД чисел без дальнейших продвижений — 1 балл.

5. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (*П. Д. Муленко*)



**Решение.** Сумма площадей трёх кругов равна $1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 1 = 1203$; сумма площадей трёх «линз» равна $100 + 3 \cdot 1 = 103$ («линза» — это пересечение двух кругов).

Площадь треугольника равна $S_1 - S_2 + S_3$, где
$S_1 = 1203/6$ — сумма площадей трёх 60-градусных секторов,
$S_2 = 103/2$ — сумма площадей половинок трёх «линз», лежащих внутри треугольника;
$S_3 = 1$ — площадь синей области.

Действительно, при таком подсчёте каждая жёлтая область внутри треугольника посчитана 1 раз, каждая зелёная: $2 - 1 = 1$ раз, синяя область: $3 - 3 + 1 = 1$ раз.

Итого получаем $\dfrac{1203}{6} - \dfrac{103}{2} + 1 = \dfrac{1203 - 309 + 6}{6} = \dfrac{900}{6} = 150$.

**Ответ:** 150.

**Критерии.** За ошибки в формуле включений-исключений — не более 3 баллов.

6. См. задачу 6 для 6 класса.