Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Решения и критерии проверки

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. За некоторые продвижения могут ставиться баллы, а за недостатки — сниматься. Для большинства задач после решения указаны критерии проверки (напечатаны серым цветом). Но, конечно, не всякое решение укладывается в заранее придуманные критерии.

Задачи для 5 класса

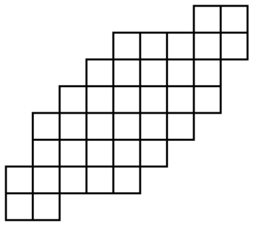
1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).
а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?
б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (*А. А. Теслер*)

Решение. а) Да, например, так: 20**2**0→201**8**→**2**019→2021.

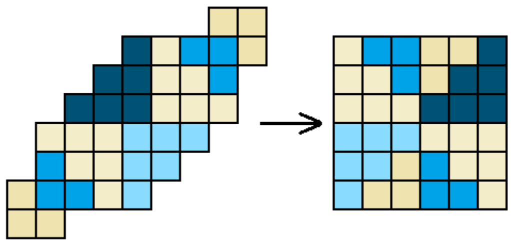
б) Да. Например, прибавляя первую цифру (единицу), дойдём до числа 2000; прибавляя первую цифру (двойку), дойдём до 2020; далее см. пункт а.

Критерии. Пункт а) 3 балла, б) 4 балла. В пункте (б) ставим 1 балл за продвижение до 1999 (например, за «решение» вида «от 1000 прибавляем по единице и вот он, результат 2021»).

2. Покажите, как разрезать «конфетку» на восемь фигур двух видов (по четыре фигуры каждого вида) и собрать из этих восьми фигур квадрат. (Фигуры одного вида должны быть одинаковыми, то есть совпадать при наложении друг на друга, но они могут быть по-разному повёрнуты.) (*Л. С. Корешкова*)

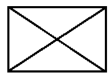


Решение. Например, так.

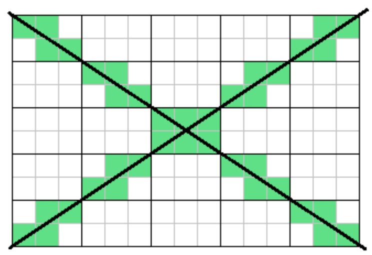


Критерии. Показано, как разрезать конфетку, но не показано, как из полученных частей составить квадрат (но его можно составить) — 6 баллов.

3. В клетчатом прямоугольнике длиной 303 клетки и шириной 202 клетки провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)



Решение. Разделим мысленно большой прямоугольник на прямоугольнички 2×3. (Центральная часть прямоугольника показана на рисунке.)



Заметим, что каждая диагональ пересекает 101 такой прямоугольничек (проходя через их вершины), и в каждом из них проходит через 4 клетки. Таким образом, две диагонали, казалось бы, проходят через $404 \cdot 2 = 808$ клеток. Но на самом деле центральный прямоугольничек 2×3 является общим для обеих диагоналей, и в нём закрашены не 8 клеток (как следовало бы из нашего подсчёта), а только 6.

Ответ: 806 клеток.

Критерии. Идея разделить прямоугольник на прямоугольники 2×3 или указание, что диагональ проходит через их узлы — не менее 1 балла (но за «решение» вида «в прямоугольнике 2×3 диагонали пересекают 6 клеток, значит, в прямоугольнике 202×303 будет в 101 раз больше» — 0 баллов, поскольку тут нет идеи деления на прямоугольники).

Отсутствует поправка, связанная с центром (то есть ответ 808) — 3 балла; центр учтён, но неверно — 4 балла.

4. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

   Решение. Обозначим количество нарциссов x, тогда роз $4x$, а тюльпанов $12x$, значит, всего цветов $17x$. Количество цветов равно произведению числа мальчиков на число девочек. Поскольку 17 — простое число, то одно из этих количеств делится на 17, то есть это 17 и 11. Значит, $17x = 17 \cdot 11$, то есть $x = 11$, а искомое количество роз $4x = 44$.

   Ответ: 44 розы.

   Критерии. Неполное переборное решение — не более 4 баллов. Только ответ — 1 балл.

5. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

   Решение. Странный результат (вдвоём за большее время персонажи успели выполнить меньше работы) объясняется разным временем, затраченным на ходьбу, ведь скорость «совместной» ходьбы равна меньшей из скоростей путников. Во второй раз время работы Валеры уменьшилось, значит, время в пути увеличилось более чем на час; отсюда следует, что Ольга тратит на путь до дачи и обратно больше часа. Поэтому за час она даже не успеет дойти и вернуться.

   Ответ: 0 досок.

   Критерии. Только ответ — 0 баллов. Понимание того, что двое идут со скоростью более медленного путника (то есть Ольги) — 2 балла.

6. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных? (*В. П. Федотов*)

   Решение. Сопоставим каждому четырёхзначному числу пятизначное, состоящее из всех остальных ненулевых цифр в порядке возрастания (например, числу 1378 сопоставим 24569). Заметим, что получилось взаимно однозначное соответствие, поэтому таких чисел поровну.

   Критерии. Понимание того, что ни в одном из чисел нет цифры 0, — 1 балл.