Задачи для 11 класса

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 2.

   Решение. Запись 00000 на экране появиться не может, поскольку она может получиться только из 00000. Запись из четырёх нулей и единицы тоже не может, поскольку тогда последняя цифра не равна остатку от деления суммы четырёх первых на 10.

   А вот сумма цифр 2 возможна. Например, «обратным ходом» можно найти пример получения записи 00011 (или 10001):

   $00011 \leftarrow 10001 \leftarrow 91000 \leftarrow 09100 \leftarrow 00910 \leftarrow 20091 \leftarrow 72009 \leftarrow 17200 \leftarrow 01720 \leftarrow 40172 \leftarrow 24017 \leftarrow 52401 \leftarrow 95240 \leftarrow 89524$.

   Критерии. 5 баллов за пример, 2 балла за доказательство невозможности меньших сумм.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. См. задачу 6 для 9 класса.

4. Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$, где $a \neq 0$ и b — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это? (*А. А. Теслер*)

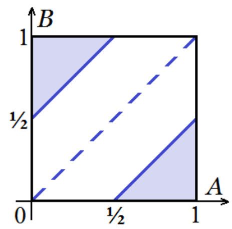
Решение. Да. Будем отдельно разбивать чётные числа и нечётные, тогда надо дважды разбить прогрессию без одной точки. Покажем, как это сделать для нечётных: поместим нечётное число x в княжество s, если $x-3$ кратно 2^s, но не кратно 2^{s+1}. Для чётных аналогично.

Критерии. Если удалось разделить всё царство, кроме конечного семейства чисел, то даётся 5 баллов.

5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится?

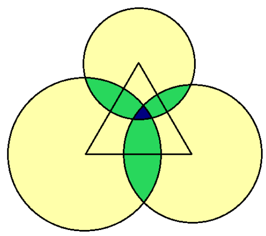
(*А. А. Теслер*)

Решение. Отождествим каждую точку дорожки с её расстоянием до зрителя по часовой стрелке. Тогда пары (A,B) можно отождествить с парами чисел из $[0,1)$ (при измерении в километрах). При этом вероятность того, что (A,B) принадлежит некоторому подмножеству $[0,1)\times[0,1)$, равна площади этого подмножества. Нас интересует множество таких (A,B), что $|A-B|>\frac{1}{2}$ (в этом случае кратчайшая дуга проходит через 0), это пара треугольников общей площадью $\frac{1}{4}$.



Ответ: $\frac{1}{4}$.

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)



Решение. Докажем, что сторона больше. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы окружностей, a — сторона треугольника. Нужно доказать, что $(r_1+r_2-a)+(r_2+r_3-a)+(r_3+r_1-a)<a$, то есть $r_1+r_2+r_3<2a$. Тогда сумма площадей кругов равна 1203, а площадь треугольника $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=150$ (см. задачу 5 для 7 класса).

По неравенству Коши $(r_1+r_2+r_3)^2\leqslant 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$, так что остаётся доказать, что

$$\sqrt{\frac{3\cdot 1203}{\pi}}<2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 150}.$$

Возведём обе части в квадрат и домножим их на $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, после чего применим цепочку очевидных неравенств

$$1203\sqrt{3}<1203\cdot 2=2406<2480=800\cdot 3{,}1<800\pi.$$

Критерии. За нахождение площади треугольника (или его стороны) даётся 3 балла.