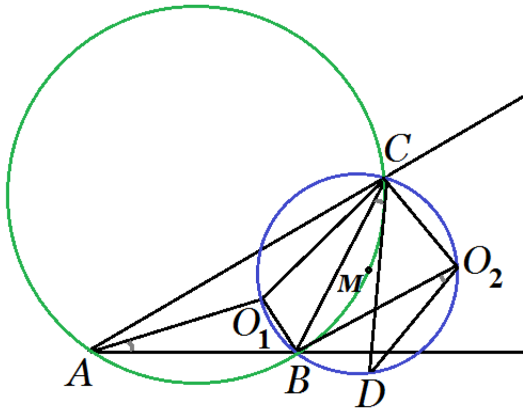
Задачи для 10 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой. (*О. А. Пяйве*)

Решение.



Заметим, что углы O_1BO_2 и O_1CO_2 прямые (как углы между биссектрисами смежных углов), поэтому B, O_1, C, O_2 лежат на одной окружности, и $\angle BCD = \angle BO_2D = \frac{1}{2}\angle BAC$. Но угол BCM тоже равен $\frac{1}{2}\angle BAC$ (поскольку опирается на половину дуги BC), так что точки D, M, C лежат на одной прямой.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

(*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

Ответ: $x = y = z = 2021$.

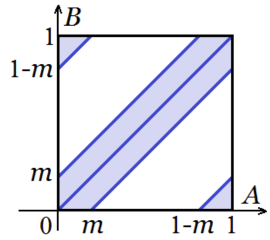
Решение. Сначала докажем, что решение единственно, если оно существует. Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) два различных решения и, не умаляя общности, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда возможны четыре варианта: $y_1 \leqslant y_2$ и $z_1 \leqslant z_2$ (причём хотя бы одно из трёх неравенств строгое); $y_1 \leqslant y_2$ и $z_1 > z_2$; $y_1 > y_2$ и $z_1 \leqslant z_2$; $y_1 > y_2$ и $z_1 > z_2$. Каждый случай противоречит соответствующему уравнению по соображениям монотонности.

Само решение можно подобрать, если предположить, что оно целое и все корни извлекаются в целых числах. Например, пусть $x = 1621+a^2 = 1237+b^2$ для целых $a, b \geqslant 0$, тогда $(b+a)(b-a) = 384$; если перебрать все варианты a, то видно, что только при $a = 20$ остальные корни извлекаются. Ещё можно заметить, что некоторые корни выглядят похоже (например, $\sqrt{x-997}$ и $\sqrt{z-997}$), поэтому удобно было бы искать решение, где $x = y = z$. После этого числа 1121, 1621, 2102 могут помочь угадать ответ.

Критерии. 2 балла за нахождение решения (проверять вычислениями, что оно подходит, или как-то мотивировать его нахождение не требуется); 5 баллов за доказательство единственности.

5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите *медианное значение* длины этой дуги, то есть такое m, что длина дуги будет превышать m с вероятностью ровно 50%. (*А. А. Теслер*)

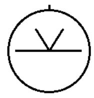
Решение. Выберем на дорожке начало отсчёта и положительное направление, тогда пары (A, B) можно отождествить с парами чисел из $[0, 1)$ (при измерении в километрах). Вероятность того, что (A, B) принадлежит некоторому подмножеству $[0, 1) \times [0, 1)$, равна площади этого подмножества. Длина короткой дуги равна $|A - B|$ при $|A - B| \leqslant \frac{1}{2}$ и $(1 - |A - B|)$ иначе. Область, где эта длина не превосходит числа $0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$, показана на рисунке, её площадь равна $2m$. При $m = 0{,}25$ получаем вероятность 50%.



Другое решение. Пусть точка A выбрана как угодно. Заметим, что с вероятностью 50% точка B принадлежит полуокружности с серединой A — а это равносильно тому, что длина дуги не больше 250 м.

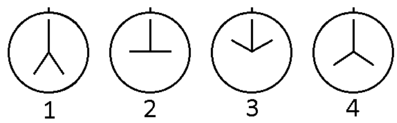
Ответ: $m = 250$ м.

6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Сколько неопределённых фотографий может быть среди них? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 3 или 100.

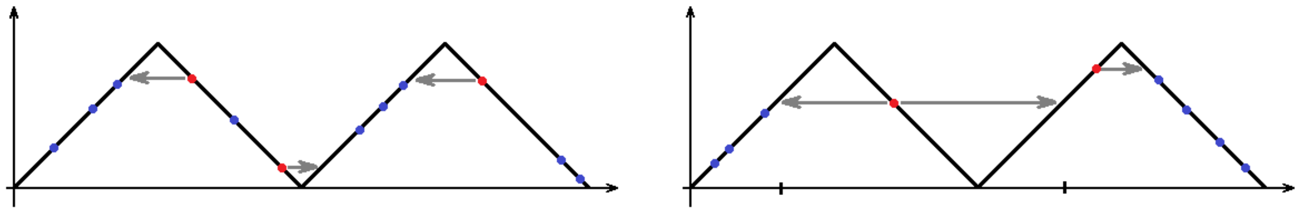
Решение. Сначала заметим, что для каждой фотографии множество возможных значений времени имеет вид $\{t;\ 12 - t;\ 12 + t;\ 24 - t\}$ $(0 < t < 6)$.

Рассмотрим следующие фотографии: A — та, которая сделана ближе всего к 6:00; B — сделанная ближе всего к 12:00; C — сделанная ближе всего к 18:00.

Если все эти фотографии различны, то каждую из них можно «симметрично отразить» относительно соответствующего момента времени (например, если первая фотография сделана в 5:50, то она же могла бы быть сделана и в 6:10, что не влияет на корректность последовательности времён). Значит, имеем как минимум три неопределённых фотографии.

Если же какие-то две из них совпадают, то существует 12-часовой промежуток, в который сделана только одна фотография (та самая, которая совпадает): например, если она сделана в момент $6 + t_1 = 12 - t_2$, то на промежутке от $6 - t_1$ до $12 + t_2$ других фотографий нет. Тогда можно уместить все фотографии в период с 0:00 до 12:00, а можно с 12:00 до 24:00, то есть все фотографии неопределённые.

Схематично эти варианты показаны на графиках. По горизонтали — реальное время создания фотографий; по вертикали — минимальное время, при котором часы выглядят как на фото; красным выделены снимки A, B, C, а стрелками показана их «неопределённость».



Докажем, что в случае, когда не все фотографии неопределённые, неопределённых фотографий всего три. Действительно, три выбранных фотографии (A, B, C) различны. Тогда для каждой из них есть лишь два возможных времени: если у какой-то из них (например, A) хотя бы три возможных момента времени, то между крайними такими моментами не меньше 12 часов, что позволяет уместить все кадры в 12-часовой промежуток (а значит, все снимки неопределённые). Заметим, что все фотографии, сделанные до снимка A, обязательно сделаны до 6:00 (так как остальные допустимые для них времена позже, чем оба допустимых времени для фото A). Аналогично устанавливаем, что фото, идущие между снимками A и B, сделаны между 6 и 12 часами (иначе они либо сняты раньше, чем обе возможности для A, либо позже, чем обе возможности для B), фото между B и C — между 12 и 18 часами, и наконец, фото, идущие после C, сняты позже 18 часов. Итак, все остальные снимки оказались определёнными.

Критерии. По одному баллу за доказательство возможностей 3 и 100. За доказательство того, что меньше 3 быть не может, даётся 2 балла.