



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

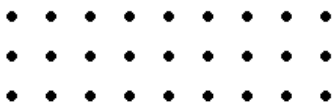
### Задачи для 10 класса

1. Существуют ли три различных квадратных трёхчлена, произведение любых двух из которых делится на третий?
2. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
3. Постройте множество точек на координатной плоскости, для которых выражение

$$(x^2 + y^2 - 4y + 3)^2 (3 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y - 3)^2})$$

принимает максимально возможное значение.

4. Назовём популярностью цифры количество чисел из набора  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$ , которые начинаются с этой цифры. Докажите, что популярность каких-то двух ненулевых цифр различается не менее чем в 5 раз.
5. Дана сетка  $m \times n$  точек, причём общее количество точек делится на 3 (например, на рисунке показана сетка  $3 \times 9$ ). При каких  $m$  и  $n$  нельзя нарисовать  $\frac{mn}{3}$  треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы треугольники не пересекались и даже не соприкасались?



6. Биссектрисы  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Докажите, что  $\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$ .
7. Есть сто чисел, изначально равных нулю. За один ход можно выбрать 9 чисел и уменьшить одно из них на 1, второе на 2, третье на 3, ... восьмое на 8, но зато девятое увеличить на 9. Какое наибольшее количество чисел можно сделать положительными с помощью таких операций?

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.