Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Заключительный этап

Решения задач

Задачи для 5 класса

1. Расставьте в фигурках цифры от 1 до 9 так, чтобы каждая цифра встречалась в одном квадрате, одном круге и одном треугольнике, а равенство оказалось верным:

   $\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square+\triangle\cdot\bigcirc\cdot\square = 2019.$

   Решение. К сожалению, получить 2019 невозможно. Приносим извинения за ошибку в задаче. В качестве компенсации за эту задачу ставилось до 2 баллов тем, кто привёл пример получения чисел 2018 и 2020.

   Замечание. Максимальное значение, которое можно получить, равно $9\cdot9\cdot9+8\cdot8\cdot8 = \ldots+1\cdot1\cdot1 = 9^3+8^3+\ldots+1^3 = 2025$. При перестановке цифр результат уменьшается. Например, так можно получить 2018 и 2020:
   $9^3+8^3+7^3+6^3+5^3+4^3+3\cdot3\cdot2+2\cdot2\cdot3+1\cdot1\cdot1 = 2020$;
   $9^3+8^3+7^3+6^3+5^3+2^3+4\cdot4\cdot3+3\cdot3\cdot4+1\cdot1\cdot1 = 2018$.

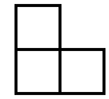
2. Встретились 7 детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Могло ли оказаться, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил)?

   Решение. Все подарили разное число подарков, при этом никто не дарил сам себе, поэтому были подарены все количества от 0 до 6. Всего был отдан 21 подарок. Каждый ребёнок получил по 3 подарка.
   Пример того, кому кто вручил подарки:
   1-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   2-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   3-му: 4-й, 6-й, 7-й;
   4-му: 5-й, 6-й, 7-й;
   5-му: 4-й, 6-й, 7-й;
   6-му: 3-й, 5-й, 7-й;
   7-му: 2-й, 3-й, 4-й.

3. Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

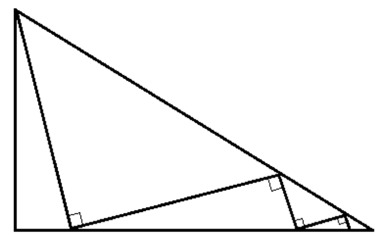
   Решение. Пусть первая ворона съела x грамм сыра. Тогда лисе от первой вороны досталось $100-x$ грамм сыра. Вторая ворона съела $\frac{x}{2}$ грамм сыра. От второй вороны лиса получила $200-\frac{x}{2}$ грамм сыра. Это было втрое больше, значит: $200-\frac{x}{2} = 3(100-x)$.
   Решение: $x = 40$. Лиса съела 240 грамм.

4. У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата 4×4, из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить? (Уголок — фигура, показанная на рисунке, возможно, повёрнутая.)



Решение. Если вырезать из доски одну клетку (любую), то оставшуюся часть можно разбить на пять уголков. Если вырезать ещё одну, то четыре из этих пяти уголков сохранятся. Поэтому одной или двух вырезанных клеток недостаточно, чтобы помешать Вите. Постановки трех клеток (например, подряд по одной из главных диагоналей) - достаточно.

5. Муха сидит в одном из острых углов комнаты, имеющей форму прямоугольного треугольника, самая длинная из сторон которого равна 5 м. В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает под прямым углом и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Коснувшись стены в десятый раз, она останавливается. Может ли муха пролететь больше 10 метров?



Решение. Гипотенуза (сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла) больше любого из катетов (двух другших его сторон), значит, удвоенная длина гипотенузы будет больше суммы длин двух других катетов. Траекторию полёта мухи можно разложить на 5 прямоугольных треугольников, где гипотенуза является частью исходной гипотенузы. То есть, даже пролетев из одного острого угла в другой, длина пути мухи будет меньше 10 метров.