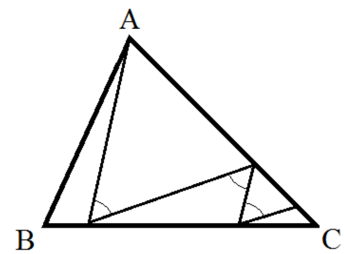
Задачи для 11 класса

1. Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном прямом направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на $60°$ и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 метров?



   Решение. Построим на AC как на основании треугольник AXC с противолежащим углом $60°$ так, чтобы муха изначально летела вдоль луча AX. Несложно показать, что общий путь, пройденный мухой, равен $AX + XC$. Тогда X пробегает некоторую дугу окружности, и пройденный путь достигает максимума, если $\angle XAC = 60°$. На самом деле даже не обязательно доказывать, что это максимум: $AC = \frac{\sqrt{6}}{2}AB = {}^{5\sqrt{}}$ $AX + XC = 2AC = 5\sqrt{6} > 12$.

2. Предприятие в течение года производит некий товар в количестве x_1 за январь, x_2 за февраль, ..., x_{12} за декабрь. Среднее производство товара с начала года вычисляется так:

$$x_1 = x_1, \quad \overline{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \overline{x}_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \ldots, \quad \overline{x}_{12} = \frac{1}{12}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}).$$

   Известно, что $\overline{x}_k < x_k$ при k от 2 до 6 и $\overline{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12. В каком месяце среднее производство товара с начала года было наибольшим?

   Решение. Заметим, что

$$\overline{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(k\overline{x}_k + x_{k+1}),$$
$$x_{k+1} - \overline{x}_{k+1} = k(\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k).$$

   Итого мы выяснили, что среднее производство увеличивается (уменьшается), когда производство в месяц больше (меньше), чем соответствующее среднее. Значит, максимум был в шестом месяце.

3. См. задачу 9.4.

4. Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

   Решение. Все подарили разное число конфет, при этом никто не дарил сам себе, поэтому были подарены все количества от 0 до $N - 1$. Значит, всего подарено $\frac{N(N-1)}{2}$, и это число должно делиться на N. А это возможно только при нечётном N (при четном будет остаток $\frac{N}{2}$).

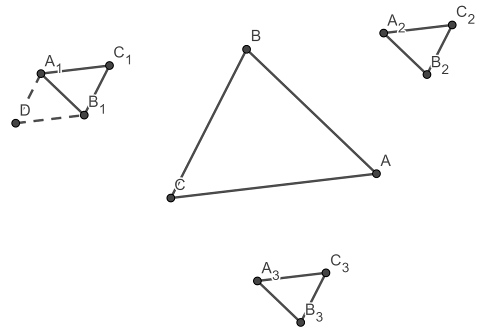
   Пример для нечётного N будем строить по индукции. Если $N = 1$, то никто ничего не дарит. Иначе пусть последний ребёнок подарил по конфете всем остальным, а все дети со второго по $(N-1)$-й подарили по конфете первому и последнему (так как N нечётное, можно это сделать так, чтобы в итоге первый и последний получили нужное число конфет). Теперь для детей с второго по $(N-1)$-го можно применить предположение индукции.

4. См. задачу 10.4.

4. На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

   Решение. Обозначим точки через A, B, C, X, Y, и пусть ABC имеет наибольшую площадь S среди всех треугольников с вершинами в этих точках. Нужно доказать, что все площади остальных треугольников не могут быть больше $\frac{2}{3}S$. Пусть это не так, тогда все площади заключены между S и $\frac{2}{3}S$. Для ABX, BCX и CAX это условие значит, что X находится в одном из трёх маленьких треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ снаружи ABC, и аналогично для Y.

   Если X и Y попали в один такой маленький треугольник (не умаляя общности, в $A_3B_3C_3$), то AXY и BXY будут иметь площадь не больше $\frac{1}{3}S$, потому что эти треугольники содержатся в треугольниках AA_3C_3 и BB_3C_3, имеющие площадь ровно $\frac{1}{3}S$. Если же они попали в разные треугольники (не умаляя общности, в $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$), то XCY имеет площадь строго меньше $\frac{2}{3}S$. Действительно, если отразить X или Y относительно C, то площадь треугольника XCY не изменится, и он окажется в четырёхугольнике CC_1A_1D. Площадь четырёхугольника равна $\frac{2}{3}S$, и она явно не может вся покрываться треугольником.



5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, \\ yz + 3y = z + 39, \\ zx + 3x = 2z + 438. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что $y \neq 1$ (так как при подстановке в первое уравнение тогда получилось бы $x - 2 = x + 106$). Тогда из первых двух уравнений можно выразить x и z:

$$x = \frac{106 + 2y}{y - 1},$$
$$z = \frac{39 - 3y}{y - 1}.$$

Подставим в последнее уравнение, домножим на $(y-1)^2$ и раскроем скобки:

$$-432y^2 + 864y + 3456 = 0,$$
$$-432(y-4)(y-2) = 0.$$

Таким образом, есть решения $(38, 4, 9)$ и $(-34, -2, -15)$.