

Задачи для 9 класса

1. Какое максимальное количество чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \dots, 12\}$, чтобы произведение никаких трёх выбранных чисел не равнялось точному кубу?
2. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA = PF$, $PE = PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD .
3. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

4. Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.
5. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки, причём ни одна из них не находится в углу. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?