Решения задач для 7 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 3.

2. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 9 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Ходят по очереди, начинает Петя. Если в конце игры полученное число окажется точным квадратом, то выигрывает Петя, иначе — Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

   Решение. Выигрышная стратегия есть у Васи. Более того, у него есть стратегия, которая обеспечит выигрыш уже после первого хода. Опишем её.

   Пусть Петя первым ходом поставил цифру не в последнюю клетку. Тогда Вася ставит в последнюю клетку одну из тех цифр, на которые не может кончаться квадрат натурального числа, например, цифру 2.

   Пусть Петя первым ходом поставил цифру в последнюю клетку. Тогда Вася ставит цифру в предпоследнюю клетку так, чтобы число давало остаток 2 или 3 от деления на 4. Это всегда можно сделать, например, так: если в разряде единиц стоит 2, 3, 6 или 7, то ставим в разряд десятков 1, иначе 0.
   Как известно, число с остатком 2 или 3 от деления на 4 не может быть точным квадратом (это легко проверить, перебрав остатки от деления на 4).

3. Вера заносит свои знания по планиметрии в таблицы, строки которых соответствуют фигурам, а столбцы — свойствам. Если фигура обладает нужным свойством, то на пересечении строки и столбца пишется 1, а в противном случае — 0. В одной из таблиц 4×4 оказалось, что в каждой строке и каждом столбце ровно по одному нулю. Известно, что первый столбец соответствует свойству «есть острый угол», а второй — свойству «есть равные стороны». Подберите ещё два свойства, а для строк — два треугольника и два четырёхугольника, чтобы получить нужную расстановку нулей и единиц.

   Решение. Например, «есть неравные стороны», «есть прямой угол»; прямоугольник (не квадрат), прямоугольный треугольник (неравнобедренный), равносторонний треугольник, параллелограмм (не ромб и не прямоугольник).

4. См. задания для 6 класса, задача 5.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

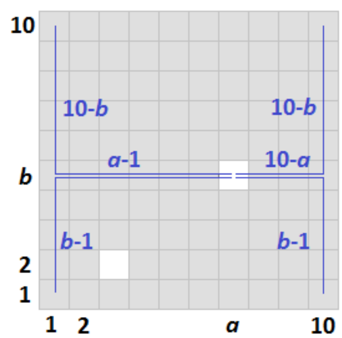
   Решение. Ответ: 20. Это значение достигается, если незакрашенные клетки стоят в противоположных углах и содержат числа 1 и 19.

Оценка.

1) Клетки, которые содержат минимальное и максимальное числа, точно не закрашены. Значит, минимум и максимум встречаются по одному разу, и именно они стоят в незакрашенных клетках. Обозначим их значения m и M соответственно.

2) Если в клетке число n, то длина пути от неё до минимальной клетки не больше $n-1$. Действительно, из клетки можно выходить в соседнюю клетку, в которой число меньше хотя бы на 1, и не позднее через $n-1$ шаг мы обязательно придём в клетку с минимальным числом.
Аналогичное верно и «с другой стороны»: если число в клетке меньше максимального на k, то от данной клетки до максимальной не более k шагов.

3) Докажем, что найдётся угловая клетка, сумма расстояний от которой до двух незакрашенных не меньше 18. (Расстоянием между клетками будем называть длину кратчайшего пути между ними.)
Действительно, пусть (a, b) и (c, d) — координаты незакрашенных клеток. Сумма расстояний от первой незакрашенной клетки до четырёх угловых составляет $(b-1+a-1)+(b-1+10-a)+(10-b+a-1)+(10-b+10-a) = 36$. То же верно для второй незакрашенной клетки, поэтому сумма всех 8 расстояний от угловых клеток до незакрашенных клеток равна 72. Значит, сумма расстояний от незакрашенных до какой-то одной угловой не меньше 18.



4) Пусть в угловой клетке, найденной в пункте 3, стоит число x. Тогда $M-m = (M-x)+(x-m)$ не меньше, чем сумма длин путей от угловой клетки до незакрашенных, то есть не меньше 18. Поскольку $m \geqslant 1$, то $M \geqslant 19$, откуда $M + m \geqslant 20$.