

Решения задач для 11 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 4.
2. См. задания для 9 класса, задача 3.
3. Существует ли пятизвенная неплоская замкнутая ломаная, все звенья которой равны, а каждые два соседних звена перпендикулярны?

Решение. Обозначим ломаную $ABCDE$. Не умаляя общности, можно считать, что длина каждого звена равна 1. Тогда можно ввести систему координат, в которой три вершины имеют координаты $A(0, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$. Тогда координаты двух других вершин — $D(1, a, b)$ и $E(c, 1, d)$.

Запишем 5 раз теорему Пифагора: три условия вида «длина звена равна 1» и ещё два условия вида «длина отрезка между несоседними вершинами равна $\sqrt{2}$ », которые следуют из перпендикулярности соседних звеньев. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} CD = 1 \\ DE = 1 \\ EA = 1 \\ CE = \sqrt{2} \\ DA = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (1 - c)^2 + (1 - a)^2 + (b - d)^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ (1 - c)^2 + 1^2 + d^2 = 2 \\ 1^2 + (a - 1)^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (a - 1)^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = (c - 1)^2 + d^2 = 1 \\ (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + (b - d)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = 1/2 \\ |b| = |d| = \sqrt{3}/2 \\ (b - d)^2 = 1/2. \end{cases}$$

Очевидно, эта система не имеет решений. Значит, такой ломаной не существует.

4. См. задания для 10 класса, задача 5.
5. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c) , образующих арифметическую прогрессию ($a < b < c$), для которых числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются точными квадратами?

Решение. Бесконечно много.

Пусть $(2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ ($A_n, B_n \in \mathbb{N}$). Тогда $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ и $A_n^2 - 3B_n^2 = 1$. Положим $a = 2B_n - A_n$, $b = 2B_n$, $c = 2B_n + A_n$. Тогда a, b, c образуют арифметическую прогрессию, $ab + 1 = (A_n - B_n)^2$, $bc + 1 = (A_n + B_n)^2$, $ca + 1 = B_n^2$.