

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Все вершины 789-угольника отмечены красным цветом, а внутри него лежат ещё 615 красных точек. Никакие три красных точки не лежат на одной прямой. Многоугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются все красные точки, и только они. Сколько этих треугольников?
2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел $n^2 + 3$ и $(n + 1)^2 + 3$, где n — натуральное число?
3. Диагонали граней почтового ящика равны 4, 6 и 7 дециметрам. Поместится ли мяч диаметром 2 дециметра в такой ящик?
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. При этом точки A , X , Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B . Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.
5. Алексей решил купить три комплекта редких марок (для себя и двух друзей). Один комплект состоит из трёх марок A , B и B . В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка A + марка B » за 200 рублей, второй продавал комплект «марка B + марка B » за 300 рублей, а в третьем комплект «марка B + марка A » стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x ?
6. Представьте двучлен $6x^4 + 5$ в виде суммы квадратов как можно большего числа многочленов с целыми коэффициентами.
7. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (A или B) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача A «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача B . Сколькими способами могло проходить голосование?