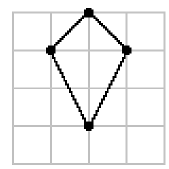
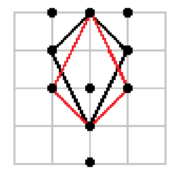
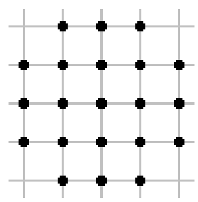
Решения задач для 6 класса

1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги. Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повёрнут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Можно ли нарисовать некоторое количество точек так, чтобы количество змеев было больше, чем количество самих точек?

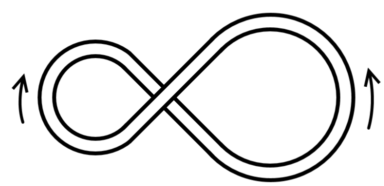




Решение. Например, так. Здесь 21 точка и 24 змея (по 6 змеев в каждом направлении).



2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



Решение. За первые 20 минут Том пробегает большую петлю, а Джерри малую. За следующие 15 минут Том пробегает малую петлю. Значит, скорость Тома в $\frac{4}{3}$ раз больше скорости Джерри, а большая петля в $\frac{4}{3}$ длиннее малой.

Обозначим длину малой петли через m, тогда длина большой равна $\frac{4m}{3}$. Изначально Джерри опережает Тома на длину большой петли, то есть на $\frac{4m}{3}$. За первые 20 минут расстояние между ними сократилось на $\frac{m}{3}$. Поскольку скорости постоянны, то так будет каждые 10 минут. Чтобы нагнать $\frac{4m}{3}$, Тому нужно $20 \cdot 4 = 80$ минут.

Ответ: через 80 минут.

3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 – 1539 – 9756 – 6561 . . . Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

Решение. Выигрывает первый игрок. Одна из возможных стратегий такова. Он называет число 9999, а потом в ответ на любое число $\overline{ABCD}$, названное вторым, называет число $\overline{DCBA}$ (то же самое число «задом наперёд»). Заметим, что после этого второму опять придётся назвать число, которое начинается на 9. Первый игрок всегда может сделать ход, ведь подходящих чисел вида $\overline{9BB9}$ (кроме 9999) больше нет.

Замечание. В качестве начального числа первый игрок может использовать любой другой палиндром (то есть число, читаемое в обоих направлениях одинаково): 1881, 2772 и т.д.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

   Решение. Ответ: 9 кошельков. Пример: 12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3.

   Докажем, что 8 кошельков не хватит.

   1) Заметим, что каждый кошелёк должен содержать не более 12 монет. Значит, 15 монет должны набираться минимум двумя кошельками. То есть когда мы делим 8 кошельков между четырьмя пиратами, каждому должно достаться по два кошелька. Значит, они группируются в четыре пары с суммой 15.
   2) При дележе между пятью пиратами хотя бы два пирата получат по одному кошельку. Значит, есть два кошелька с 12 монетами.
   3) Из пункта 1 следует, что в пару к этим двум кошелькам должны быть два кошелька с 3 монетами.
   4) Если кошельков по 12 монет только два, то остальные группируются в пары с суммой 12. Тогда в дополнение к каждому числу кошельку с 3 монетами найдётся кошелёк с 9 монетами. А тогда каждому из них нужна пара с 6 монетами (чтобы получалась сумма 15). То есть набор кошельков такой: 12, 12, 3, 3, 9, 9, 6, 6. Очевидно, что 20 монет с их помощью не получить (20 не делится на 3).
   5) Пусть кошельков по 12 монет больше двух, то есть хотя бы три. Тогда и кошельков с 3 монетами (которые дополняют их до 15 монет, см. п. 1) должно быть хотя бы три. Однако из такого набора кошельков нельзя сформировать ни одной порции в 20 монет; чтобы можно было получить три таких порции, нужно добавить ещё хотя бы три кошелька, тогда их будет не менее девяти.

5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а T — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — N или M? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   Решение. См. решение задачи 5 для 5 класса.