Решения задач для 10 класса

1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Найдите первые 10 цифр наименьшего и наибольшего из таких чисел. Обоснуйте ответ.

   Решение. Среди каждых десяти подряд идущих цифр все цифры от 0 до 9 встречаются по одному разу, то есть сумма каждых 10 последовательных цифр равна 45. Значит, первая цифра равна одиннадцатой, вторая — двенадцатой и т.д., то есть число состоит из повторяющихся блоков по 10 цифр (последний блок, возможно, неполон).

   Заметим, что $2017 = 44 \cdot 45 + 37$. Значит, число состоит из 44 блоков по 10 цифр и в конце ещё нескольких цифр с суммой 37. Иначе говоря, до 45 блоков (до 450 цифр) не хватает суммы цифр 8, которая может быть набрана одной (8), двумя (35), тремя (521) или четырьмя (5210) цифрами, но не более $(0+1+2+3+4 > 8)$. Значит, длина числа — от 446 до 449 цифр.

   Число будет наименьшим, если оно состоит из 446 цифр, причём первые 10 цифр образуют как можно меньшее число. Сумма первых шести цифр должна равняться 37. Первая из них может равняться 2, тогда остальные — 5, 6, 7, 8, 9 (если первая цифра равна 1, то сумма остальных пяти должна быть 36, что невозможно для различных цифр). Следующие четыре цифры — 0, 1, 3, 4, минимальное образованое ими число равно 0134. Наименьшее число начинается с цифр 2567890134.

Число будет наибольшим, если оно состоит из 449 цифр, причём первые девять цифр образуют наибольшее возможное число с суммой цифр 37 (тогда десятая цифра будет равна 8). Максимальное число, образованное первыми девятью цифрами, есть 976543210.

Ответ: первые десять цифр наименьшего числа — 2567890134, наибольшего — 9765432108.

2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y, для которых

$$25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}}{2}\geqslant\sqrt{25^{x^4-y^2}\cdot 25^{y^4-x^2}}$$

(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим).

Правая часть равна

$$5^{x^4-x^2+y^4-y^2}=5^{(x^2-1/2)^2+(y^2-1/2)^2-1/2}\geqslant 5^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, в задаче нужно найти x и y, при которых неравенство обращается в равенство. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$25^{x^4-y^2}=25^{y^4-x^2},$$

$$(x^2-1/2)^2+(y^2-1/2)^2=0.$$

Они выполняются при $x^2=y^2=1/2$ (и только в этом случае), что даёт четыре варианта ответа для x и y.

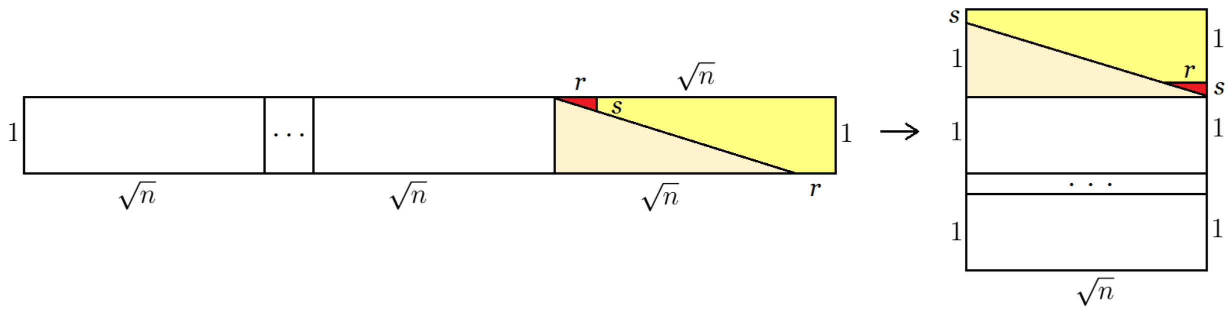
Ответ: $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big);\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big);\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big);\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$.

3. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

Решение. См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. Докажите, что при любом натуральном $n \leqslant 2017$ прямоугольник $1\times n$ можно разрезать на 50 частей и составить из них квадрат.

Решение. Отрежем от исходного прямоугольника столько прямоугольников размером $1 \times \sqrt{n}$, чтобы оставшаяся часть имела длину между $\sqrt{n}$ и $2\sqrt{n}$. Поскольку $\sqrt{n} < 45$, то будет отрезано менее 45 прямоугольников. Оставшуюся часть разрежем на три фигуры (большой треугольник, маленький треугольник и пятиугольник), как показано на рисунке.

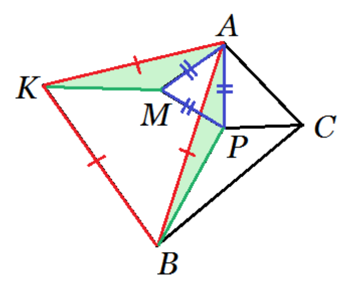


Теперь переложим эти фигуры, как показано справа. (Три непрямоугольных фигуры действительно образуют прямоугольник, поскольку их «косые» стороны имеют раные угловые коэффициенты и одна из них равна сумме двух других.) В результате получился прямоугольник, одна из сторон которого равна $\sqrt{n}$. Поскольку его площадь n, то другая сторона тоже равна $\sqrt{n}$, то есть это квадрат. Заметим, что он составлен менее чем из 48 частей. Разрезав произвольным образом некоторые из них на меньшие части, можно получить 50 частей.

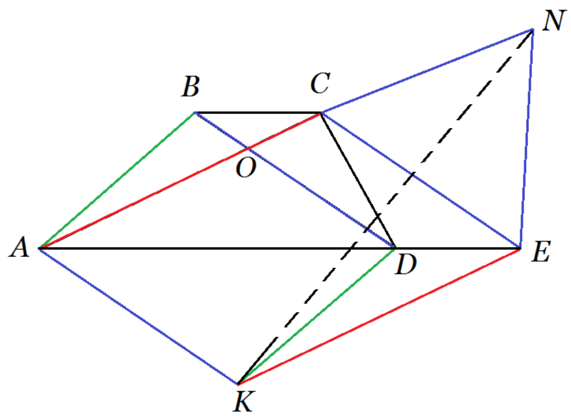
5. Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

Решение. Пусть основания трапеции — AD и BC, а диагонали пересекаются в точке O. Рассмотрим сначала более сложный случай, когда $\angle COD = 60°$.

Лемма. Пусть на стороне произвольного треугольника ABC построен вовне правильный треугольник ABK. Тогда для любой точки P имеет место неравенство $PA + PB + PC \geqslant CK$.



Доказательство леммы: построим правильный треугольник APM, ориентированный как ABK. Тогда треугольники AKM и ABP равны по двум сторонам и углу, и $PA + PB + PC = KM + MP + PC \geqslant CK$.



Теперь построим параллелограммы $BCED$ и $ABDK$. Треугольник KDE получается из ABC переносом на вектор $\overrightarrow{BD}$, поэтому $AC = KE$. В силу параллельности $\angle CEK = \angle AOB = 60°$, $\angle ACE = \angle AOD = 120°$.
Имея в виду применить лемму, отложим правильный треугольник CNE вовне CKE. Треугольники KEN и ACE равны по двум сторонам и углу $120°$ между ними, поэтому $KN = AE$. Пользуясь леммой, имеем

$$AB + CD = (DC + DK + DE) - DE \geqslant KN - DE = AE - DE = AD,$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим более простой случай, когда $\angle AOD = 60°$. Приведём этот случай к предыдущему с помощью сжатий. А именно, будем сдвигать BC к AD в направлении, перпендикулярном AD (на рисунке — вниз). При этом углы CAD и CDA уменьшаются, значит, $\angle AOD$ увеличивается. Можно привести BC в такое положение, что $\angle AOD = 120°$. По уже доказанной части задачи, в этом случае сумма боковых сторон будет не меньше основания. Но боковые стороны в процессе сжатия уменьшились (по теореме Пифагора), а основание не изменилось. Значит, до сжатия это неравенство тем более выполнялось.