

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?
2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?
3. Существуют ли такие натуральные числа a и b , что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?
4. В треугольнике ABC угол B равен 30° , а угол C равен 105° . Точка D — середина стороны BC . Найдите угол BAD .
5. В каждой целочисленной точке плоскости растёт дерево диаметром 10^{-6} . Дровосек срубил дерево, стоящее в точке $(0, 0)$, и встал в центр пенька. Ограничена ли часть плоскости, которую он сумеет увидеть? Считайте каждое дерево бесконечной цилиндрической колонной, ось симметрии которой проходит через целочисленную точку плоскости.
6. Приведите пример четырёх положительных чисел, которые не могут служить радиусами четырёх попарно касающихся сфер.
7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k ?