

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 9 класса

1. Докажите, что для любого $n > 3$ существует n -угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.
2. Сумма трёх натуральных чисел равна 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать НОК этих чисел?
3. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?
4. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.
5. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?
6. Найдите все натуральные a , b и c , для которых $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.
7. В таблице 30×30 клеток поставлено 162 плюса и 144 минуса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?
8. В треугольнике ABC выбрана точка D на стороне AB так, что углы ACD и ABC равны. Пусть S — центр описанной окружности треугольника BCD . Докажите, что точки A , C , S и середина BD лежат на одной окружности.
9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?
10. Пусть H — такая точка внутри треугольника ABC , что $\angle HAB = \angle HCB$ и $\angle HBC = \angle HAC$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC .