

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/14 год

Задачи 1 тура, 9 класс

1. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 33. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 10 чисел. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы три из десяти отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

2. Дан прямоугольник $ABCD$. На луче DC отложен отрезок DK , равный BD . Точка M — середина отрезка BK . Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 10.

4. На плоскости нарисовали 5 красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество.

5. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 99. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$