

**Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2013/2014 учебный год. Второй тур  
Задачи для 11 класса**

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?
2. Пусть  $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24$ . Решите уравнение  $f(f(f(f(x)))) = 0$ .
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать пять частей, из которых можно составить прямоугольник  $1 \times 2,7$ . Части можно поворачивать и переворачивать.
4. Существует ли треугольная пирамида, у которой высота равна 60, высота каждой боковой грани, проведённая к стороне основания, равна 61, а периметр основания равен 62?
5. Пусть  $a$  и  $n$  — натуральные числа, причём известно, что  $a^n$  — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное  $k$  такое, что  $a$  не может быть  $k$ -значным числом.
6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел  $a$  и  $b$  значение выражения  $a\#b = (a+b)/(1-ab)$ , если оно определено. Как и в обычной арифметике, умножение на натуральное число Павел понимает как сложение соответствующего числа одинаковых слагаемых:  $a@b = ((a\#a)\#a)\dots\#a$  (здесь  $b$  «слагаемых»). Существуют ли в арифметике Павла такие неравные натуральные числа  $x$  и  $y$ , для которых равны «произведения»  $x@y$  и  $y@x$ ?