

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/14 год

Задачи 1 тура, 11 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.

2. Для исследования подводного мира соорудили прямолинейную штангу, уходящую под углом 45° к поверхности воды на глубину 100 метров. Водолаз связан со штангой гибким тросом, позволяющим ему удаляться от любой точки штанги на расстояние не более 10 метров. Считая размеры водолаза нулевыми (точечными), найдите объём доступной ему части подводного пространства. Дайте точный ответ и округлите его до ближайшего целого значения в кубических метрах.

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания.

4. У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Костя склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед $1 \times 1 \times n$ — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?

5. CH — высота в треугольнике ABC , а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO , а его основание обозначили через T . Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC . Найдите отношение длин отрезков BM и CM .

6. Пусть p_1, \dots, p_n — различные простые числа. Пусть S — сумма всевозможных произведений четного (ненулевого) количества различных простых из этого набора. Докажите, что $S + 1$ делится на 2^{n-2} .