Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Решения и критерии проверки

Ниже приведены решения задач и критерии проверки. В тексте встречаются ссылки на задачи из вариантов других классов; так, «задача 5.6» означает задачу №6 для 5-го класса.

Сроки проверки. «Первичная» проверка должна быть в основном закончена к 10 февраля. После этого ответственные за параллель могут перепроверять работы с высокими баллами и те, которые вызвали затруднения у проверяющих.

Оценивание работ. Максимальный балл за каждую задачу — 7 баллов. Допускаются только целые баллы.

Рекомендуется придерживаться следующего принципа. Если задача в целом решена верно, но в решении есть мелкие ошибки или пробелы в объяснениях, то ставится 5-6 баллов. Если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (не просто «что-то разумное написано», а именно существенные продвижения), то ставится 1-2 балла. Если продвижения *очень* существенны (человек понял практически всё, что нужно для решения задачи, но задачу по непонятной причине не решил), то можно поставить 3 балла. В целом оценки в 3 и особенно 4 балла рекомендуется ставить как можно реже.

Частные критерии описаны после решения каждой задачи. Они устроены примерно так:

Полное решение – описание того, что должно быть в семибалльном решении (а что не обязательно должно быть: например, от младших мы не всегда требуем чётких доказательств, а от старших – доказательства очевидных фактов).

Погрешности – недостатки решения, приводящие к снятию 1-2 баллов. Если в решении допущено несколько погрешностей, то происходит «частичное суммирование»: за две погрешности по 1 баллу вычитается 2 балла, но за несколько двухбалльных погрешностей всё равно в сумме снимается два балла, в крайнем случае – три. В общем, правило о том, что «задача в целом решена – ставь хотя бы 5, в крайнем случае 4», должно соблюдаться.

Продвижения – указано, за какие продвижения даются баллы, если задача в целом не решена. Здесь действует аналогичное правило «частичного суммирования» с потолком в 2, изредка 3 балла.

К «продвижениям» обычно относится наличие верного числового ответа при отсутствии решения (за ответ ставится 1 балл); однако если видно, что ответ получился верным совершенно случайно из абсолютно неверных соображений, то можно ставить 0. Верно угаданный ответ вида «да/нет» баллов не приносит.

Типичная «погрешность» - арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения. За неё снимается 1-2 балла (в зависимости от сложности задачи – чем проще задача, тем дороже стоит в ней дурацкая ошибка).

Разумеется, реальность разнообразнее заранее придуманных критериев. Тем не менее, надеемся, что они помогут оценивать работы более единообразно. Обо всех спорных случаях стоит сообщать ответственному за параллель, который выступает гарантом единообразия критериев. Критерии могут уточняться в первые дни (ответственные по параллелям могут уточнять их самостоятельно и сообщать проверяющим).

Заполнение таблицы с результатами. Результаты проверки работ нужно внести в xls-таблицу вместе с данными из анкет. Инструкция по указанию данных приведена ниже (вам может показаться, что она слишком подробная и занудная, но она должна облегчить сведение данных в общую таблицу).

- № - не заполняется.
- Параллель, Проверяющий – ваша фамилия и параллель, которую вы проверяете.
- E-mail организатора – с какого ящика присланы письма на ящик жюри (будьте внимательны: некоторые письма переслали с других ящиков). Организатор – название организатора в произвольной форме (например, город и школа в соответствии с указанными в теме письма).
- Страна – по-русски. Регион – без сокращений и без слова «Республика», например, «Минская область», «Татарстан». Населённый пункт: «Магнитогорск», «пос. Петрово Юрьевского района» (тип населённого пункта пишем для сёл, посёлков и т.д., но не для городов; если не райцентр, указываем район).
- «Сельская местность» и «Особые права» - пункты, добавленные по требованию СПбГУ для какой-то отчётности (типа «а сколько в вашей олимпиаде участвует инвалидов, сирот и детей из сельской местности?»); если ответ отсутствует или отрицательный, ничего не писать.
- Школа – например, «школа 56», «гимназия 5 с углублённым изучением математики», «лицей «Золотая горка»» и т.д. (без аббревиатур типа «ГБОУ»; вместо «СОШ» и «ООШ» пишем «школа»; символ № не используем; «имени Пушкина» или «при ДВГУ» оставляем).
- Класс – название класса с буквой.
- Кружок – занимается ли в кружке и где (ФИО руководителя, если это кружок при школе, можно не писать).
- E-mail – для участников с совсем слабыми работами можно не указывать. Если отсутствует e-mail, можно указать вместо него телефон.
- Фамилия, имя – ясно (отчество не нужно).
- 1–6 – баллы по задачам, итого – сумма.
- Примечание – в частности, нужно отмечать подозрения на списывание. Примечания по задачам (пр.1 – пр.6) – если не уверены в оценке или в этой задаче есть что-то интересное.

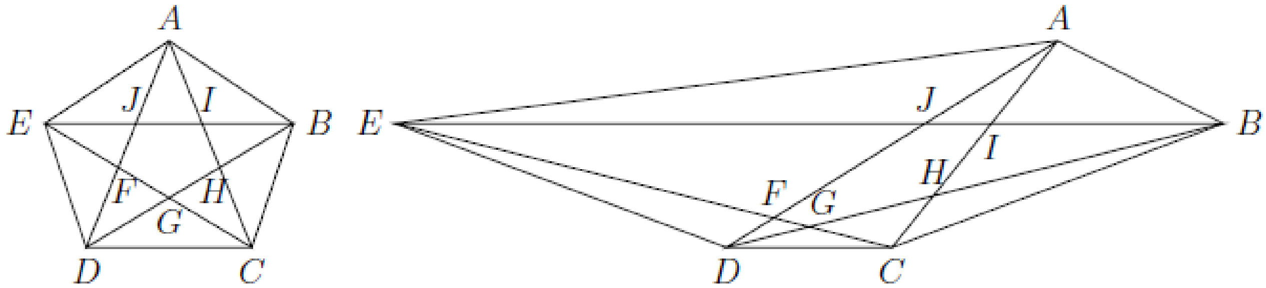
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

Решение. Начать нужно с того, что точки пересечения диагоналей служат вершинами другого выпуклого пятиугольника, сумма углов которого равна 540°. Если все его углы тупые, то искомая сумма образована смежными с ними углами и равна 360°. Но если среди углов есть острые, то сумма станет меньше (так как смежный тупой угол заменяется внутренним острым). Легко построить примеры, показывающие, что её можно непрерывно уменьшать до нуля. Так, из рисунка видно, что если сдвигать вершину E влево, а A и B – вправо, то углы F и I можно сделать острыми и сколь угодно малыми; тогда сумма трёх остальных внешних углов будет стремиться к нулю.



Ответ: от 0 до 360°.

Критерии. По общим правилам.

2. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

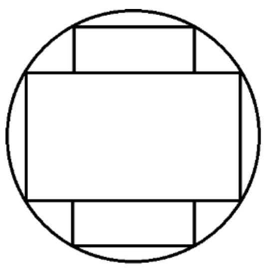
Решение и критерии. См. задачу 8.1.

3. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему?

Решение и критерии. См. задачу 8.3.

4. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать три части, из которых можно составить прямоугольник 1×2,4. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем два маленьких прямоугольника: один с вершинами $(\pm 1/2, 1/2)$ и $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$, и второй, симметричный первому. Стороны каждого из этих прямоугольников равны 1 и $\sqrt{3}/2-1/2$. Из этих трёх прямоугольников легко сложить один со сторонами 1 и $\sqrt{3}+2\cdot(\sqrt{3}/2-1/2)=2\sqrt{3} - 1 > 2{,}4$.



Критерии.

Полное решение состоит из картинки и вычислений, доказывающих, что из полученных частей можно сложить нужный (или более длинный) прямоугольник. Утверждения вроде того, что точки с координатами $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$ лежат на окружности, считаем очевидными.

Погрешности. Картинка при отсутствии пояснений и вычислений оценивается в 5 баллов.

5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

Решение. Пусть a – k-значное число, тогда $10^{k-1} \le a < 10^k$, поэтому $10^{(k-1)n} \le a^n < 10^{kn}$, то есть количество цифр в числе a^n лежит в промежутке $[(k-1)n+1, kn+1)$.

Заметим, что при фиксированных $n \le 1000$ и $k \ge 3$ количество цифр принимает все значения из этого промежутка (не может случиться, что при увеличении a на 1 число цифр в a^n увеличится более чем на одну); это можно установить, например, средствами мат. анализа (при умножении a на 0,001 a^n увеличится не более чем в e раз, т.е. менее чем в 10 раз). При $k \le 3$ это очевидно. Поэтому если в таком промежутке лежит число 2014, то найдётся k-значное a, для которого a^n – 2014-значное.

Итак, подходящее a существует тогда и только тогда, когда $(k-1)n+1 \le 2014 \le kn+1$, то есть когда n лежит в промежутке $[2013/k; 2013/(k-1))$.

Значит, надо найти наименьшее k, для которого в этом промежутке нет ни одного целого числа. Заметим, что длина этого промежутка равна $2013/k(k-1)$, и она должна быть меньше 1. Значит, $k(k-1)>2013$, т.е. $k>45$.

Проверим для k начиная с 46, выполняется ли условие об отсутствии целого числа в указанном промежутке. Мы обнаружим, что
(для $k=46$) $2013/46 < 44 < 2013/45$ (т.к. $44\cdot45<2013$, $44\cdot46=45^2-1^2=2025-1>2013$);
(для $k=47$) $2013/47 < 43 < 2013/46$ (т.к. $43\cdot46<2013$, $43\cdot47=45^2-2^2=2025-4>2013$);
(для $k=48$) $2013/48 < 42 < 2013/47$ (т.к. $42\cdot47<2013$, $42\cdot48=45^2-1^2=2025-9>2013$);
но (для $k=49$) $2013/49 > 41$ (т.к. $41\cdot49=45^2-1^2=2025-16<2013$).

Таким образом, промежуток $[2013/49, 2013/48)$ не содержит целых чисел, и при $k=49$ подходящих n не существует.

Ответ: k=49.

Критерии.
Задача сложная, поэтому на баллы за разумные мысли скупиться не надо. Любой ответ в районе $\sqrt{2014}$, который предваряется хоть чем-нибудь разумным, достоин баллов.
За отсутствие того, что мелким шрифтом, снимается 1 балл.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения $x\#y=(x+y)/(1-xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b и «прибавил» к ним c, а друга попросил «сложить» числа b и c и «прибавить» к ним a. Могли ли у них получиться разные результаты?

Решение. Нужно проверить, что $a\#(b\#c)=(a\#b)\#c$. Это можно доказать прямым вычислением, а можно заметить, что если x и y — тангенсы углов A и B, то $x\#y$ — тангенс угла A+B, и поэтому требуемое свойство следует из того, что tg(A+(B+C))=tg((A+B)+C).

Замечание. При этом возможно, что одно из значений определено, а второе не определено, например, при a=2, b=c=1.

Критерии.
Мы будем интерпретировать фразу «у них получились разные результаты» как «оба получили какие-то числа, и эти числа различаются». Поэтому полное решение не обязано содержать замечание о том, что выражения имеют разную область определения.

Продвижения.
Любые разумные упоминания тангенсов — не менее 1 балла.
Если вместо доказательства (или в дополнение к неверному доказательству) участник приводит пример, когда одно выражение определено, а другое нет – 1 балл.

Рассуждения, которые в конце концов сводятся к мысли «раз называется суммой, значит, ассоциативна» — 0 баллов.