САММАТ-2022
Решение задач 7 класса

Задача №1. В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

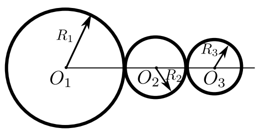
Решение: Обозначим n — число учеников, m — их средний возраст, отсюда получим возраст учителя: $m+24$. Сумма $nm+m+24$ даёт сумму всех возрастов. Теперь, учитывая, что в классе $n+1$ человек, легко найти их средний возраст: $m+\dfrac{24}{n+1}$. Из условия задачи теперь получаем:

$$m+24=m+\frac{24}{n+1}+20.$$

Отсюда: $n=5$.

Ответ: 5.

Задача №2. Центры трех кругов с радиусами $R_1=78$ см, $R_2=30$ см и $R_3=24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?



Решение: Для решения найдем наименьшее общее кратное чисел 78, 24 и 30: $78=13\cdot2\cdot3$; $30=2\cdot3\cdot5$; $24=2\cdot3\cdot4$. НОК $=13\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5=1560$. Тогда количество оборотов $n_1=1560:78=20$; $n_2=1560:30=52$; $n_3=1650:24=65$.

Ответ: $n_2=52$ оборота.

Задача №3. Решить уравнение: $\dfrac{(n-2)!}{n!}+\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{12}$. Указание: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Решение: $\dfrac{(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!}+\dfrac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow\dfrac{1}{n(n-1)}+\dfrac{1}{(n+1)n}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow$ $\dfrac{2n}{n(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{24}\Rightarrow24=n^2-1\Rightarrow n^2=25\Rightarrow n=5$, $n=-5\notin\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ — множество натуральных чисел).

Ответ: $n=5$.

Задача №4. При каких натуральных значениях n число $n^{n+1}-2n^2+2n-1$ нацело делится на $(n-1)^2$?

Решение: Заметим, что $(n-1)^2=n^2-2n+1$ и запишем число $n^{n+1}-2n^2+2n-1$ в виде

$$n^{n+1}-2n^2+2n-1=n^{n+1}-n^2-n^2+2n-1=n^{n+1}-n^2-(n-1)^2,$$

поэтому данное число делится на $(n-1)^2$ тогда и только тогда, когда $n^{n+1}-n^2$ делится на $(n-1)^2$. Преобразуем данное число к виду

$$n^{n+1}-n^2=n^2\cdot n^{n-1}-n^2=n^2(n^{n-1}-1)$$

и заметим, что числа $(n-1)^2$ и n^2 — взаимно простые, поскольку числа $n-1$ и n — взаимно простые. Следовательно, нужно, чтобы число $n^{n-1}-1$ делилось на $(n-1)^2$. Заметим, что это число можно записать в виде

$$n^{n-1}-1 = n^{n-1}-n^{n-2}+n^{n-2}-n^{n-3}+n^{n-3}-n^{n-4}+\cdots+n^3-n^2+n^2-n+n-1 =$$
$$= n^{n-2}(n-1)+n^{n-3}(n-1)+n^{n-4}(n-1)+\cdots+n^2(n-1)+n(n-1)+n-1 =$$
$$= (n-1)(n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+\cdots+n^2+n+1),$$

поэтому это число делится на $n-1$ и, значит, чтобы оно делилось на $(n-1)^2$, нужно, чтобы число $n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+\cdots+n^2+n+1$ делилось на $n-1$.

Найдем остаток от деления числа $n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+\cdots+n^2+n+1$ на число $n-1$. Так как остаток от деления числа n на число $n-1$ равен 1, тогда остаток от деления чисел $n^{n-2}, n^{n-3}, n^{n-4}, \ldots, n^2$ равен степени 1, то есть тоже равен 1. Поэтому остаток от деления числа $n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+\cdots+n^2+n+1$ на число $n-1$ при любом n равен сумме

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{n-1} = n-1$$

или равен нулю. Это означает, что , то есть число $n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+\cdots+n^2+n+1$ делится на число $n-1$ при любом натуральном n.

Ответ: При любом натуральном n.

Задача №5. Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда).

Решение: Пусть a, b и c — измерения параллелепипеда. Найдем делители каждой величины.

$$a = 728 = 7\cdot 8\cdot 13; \quad b = 616 = 7\cdot 8\cdot 11; \quad c = 399 = 3\cdot 7\cdot 19.$$

Наибольший общий делитель равен 7. Тогда количество ящиков будет следующим

$$8\cdot 11\times 8\cdot 13\times 19\cdot 3 = 88\cdot 104\cdot 57 = 521664.$$

Ответ: 521664.

Задача №6. Две коробки конфет и 3 пачки чая стоят 910 рублей, а три коробки конфет и 5 пачек чая стоят 1440 рублей. Сколько стоят 4 коробки конфет и 2 пачки чая?

Решение: Пусть x — стоимость коробки конфет, y — стоимость пачки чая. Тогда

$$\begin{cases} 2x+3y=910 \\ 3x+5y=1440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+9y=2730 \\ 6x+10y=2880 \end{cases} \Rightarrow y = 150 \text{ р.}$$

Тогда $x = (910-3y)/2 = (910-450)/2 = 230$ р.
$4x+2y = 4\cdot 230 + 2\cdot 150 = 1220$ р. — стоимость 4 коробок конфет и 2 пачек чая.
Ответ: 1220 р.

Задача №7. Найти все целые значения m, при которых дробь $\dfrac{3m+2}{m-4}$ является натуральным числом.

Решение: Представим исходную дробь в виде $\dfrac{3m+2}{m-4} = 3 + \dfrac{14}{m-4}$. Дробь представляет натуральное число, если $\dfrac{14}{m-4} > -3$ и число 14 нацело делится на $m-4$, т.е. $m-4$ может принимать значения $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Проверим все значения $m = 4$:

1) $m - 4 = \pm 1 \Rightarrow m = 5$; $m = 3$; при $m = 5$ имеем $\dfrac{3m+2}{m-4} = 17$ (решение). Аналогично при $m = 3$ $\dfrac{3m+2}{m-4} = -11$ (не подходит).

2) $m-4 = \pm 2 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = 10$ ($m = 6$ решение); $m = 2 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = -4$ (не подходит).

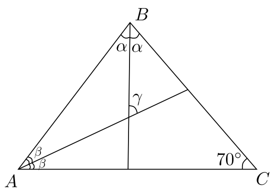
3) $m-4 = \pm 7 \Rightarrow m = 11 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = 5$ ($m = 11$ решение); $m = -3 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = 1$ ($m = -3$ решение).

2) $m-4 = \pm 14 \Rightarrow m = 18 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = 4$ ($m = 18$ решение); $m = -10 \Rightarrow \dfrac{3m+2}{m-4} = 2$ ($m = -14$ решение).

Таким образом, при значениях $m = \{5; 6; 11; 18; -3; -10\}$ дробь $\dfrac{3m+2}{m-4}$ — натуральное число.

Ответ: $m = \{5; 6; 11; 18; -3; -10\}$.

Задача №8. В треугольнике ABC угол $\angle C = 70°$. Найти острый угол между биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$.



Решение: Пусть γ — искомый угол. Из рисунка следует, что $\gamma = \alpha + \beta$ и $2\alpha + 2\beta + 70° = 180°$. Тогда $2(\alpha+\beta) = 110° \Rightarrow \alpha + \beta = 55°$ и искомый угол $55°$.

Ответ: $55°$.

Задача №9. Найдите числа $\overline{abc5}$ и $\overline{mn}$, если они удовлетворяют условию $\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}$.

Решение:

$\overline{abc5} = (10m + n) \cdot 11$ $(1 \le m \le 9)$. Из условия задачи следует, что $n = 5$; $\overline{abc5} = 110m + 55 = 100m + (10m + 50) + 5$. Чтобы число $100m + 10m + 50 + 5$ было четырехзначным, $m > 8$, т.е. $m = 9$. Тогда имеем $\overline{abc5} = 95 \cdot 11 = 1045$.

Ответ: $\overline{abc5} = 1045$, $\overline{mn} = 95$.

Задача №10. Из полного кувшина, вмещающего 300 грамм концентрированного сока, отлили третью часть и столько же долили воды. Затем из кувшина отлили четвертую часть разведенного сока и снова долили воды. После этого отлили еще третью часть, но водой не доливали. Сколько оказалось в кувшине сока и воды?

Решение: Обозначим через 1 — объем кувшина с соком в первоначальном состоянии. Тогда после первого переливания в кувшине будет $\frac{2}{3}$ сока и $\frac{1}{3}$ воды. Далее, после второго переливания отлили $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ сока, значит его осталось $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Когда отлили еще третью часть, то количество отлитого сока $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, значит осталось $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ чистого сока, а весь оставшийся объем равен $\frac{2}{3}$. Учитывая, что в этом объеме $\frac{1}{3}$ чистого сока, то воды будет $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Таким образом, после третьего отливания будет воды и сока по 100 грамм.

Ответ: Сока — 100 грамм, воды — 100 грамм.