САММАТ-2022
Решение задач 10 класса

Задача №1. Докажите, что все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)=2022$$

меньше $\dfrac{1}{2021!}$, где $2021!=1\cdot2\cdot3\dots2021$.

Решение: Пусть x_0 — корень уравнения. Если $x_0<0$, то $x_0<\dfrac{1}{2021!}$. Пусть $x_0>0$, отметим, что x_0 не может быть равным нулю (при подстановке не обращает уравнение в тождество). Имеем

$$x_0+1=\frac{2022}{(x_0+2)(x_0+3)\dots(x_0+2022)}<\frac{2022}{2\cdot3\cdot4\dots2022}=\frac{1}{2021!}.$$

Следовательно, и $x_0<\dfrac{1}{2021!}$.

Задача №2. Пусть число $\overline{abc}$ простое. Через n обозначим наименьший делитель числа $\overline{abcabc}$, отличный от 1, а через m — другой делитель, ближайший к n. Найти $n\cdot m$.

Решение: Очевидно,

$$\overline{abcabc}=1000\overline{abc}+\overline{abc}=1001\overline{abc}.$$

Делителями этого числа могут быть делители числа 1001 или само число $\overline{abc}$, которое больше 1000. Наименьший делитель числа 1001 равен 7 (это легко проверить перебором, даже не зная признака делимости на 7). Признак делимости на 11 показывает, что 11 — следующий делитель за числом 7. $n\cdot m=77$.

Ответ: 77.

Задача №3. Решить уравнение $x^8-8\sqrt{3}x^6+66x^4-72\sqrt{3}x^2+81=0$.

Решение: Сделаем замену переменной по формуле $x^2=\sqrt{3}a$, тогда уравнение примет вид

$$9a^4-8\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}a^3+66\cdot13a^2-72\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}a+81=0,\Rightarrow$$
$$a^4-8a^3+22a^2-24a+9=0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение имеет корень $a=1$, поскольку сумма его коэффициентов равна $1-8+22-24+9=32-32=0$. Поделим многочлен $a^4-8a^3+22a^2-24a+9$ на двучлен $a-1$ по схеме Горнера, получим

	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
	1	-8	22	-24	9
$a=1$	1	-7	15	-9	0
	a^3	a^2	a^1	a^0	

поэтому полученное уравнение примет вид

$$(a-1)(a^3-7a^2+15a-9)=0.$$

Уравнение $a^3 - 7a^2 + 15a - 9 = 0$ также имеет корень $a = 1$, поскольку сумма его коэффициентов равна $1 - 7 + 15 - 9 = 16 - 16 = 0$. Снова поделим многочлен $a^3 - 7a^2 + 15a - 9$ на двучлен $a - 1$ по схеме Горнера, получим

	a^3	a^2	a^1	a^0
	1	-8	15	-9
$a = 1$	1	-6	9	0
	a^2	a^1	a^0	

поэтому полученное уравнение примет вид

$$(a-1)(a-1)(a^2 - 6a + 9) = 0, \Leftrightarrow (a-1)^2(a-3)^2 = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение имеет кратные корни $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$. Тогда исходное уравнение имеет кратные корни $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3}$ и $x_{3,4} = \pm 3\sqrt[4]{3}$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3}, x_{3,4} = \pm 3\sqrt[4]{3}$..

Задача №4. Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots, a_{22} = 16$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{21}} + \sqrt{a_{22}}}.$$

Решение: Найдем разность прогрессии $d = \dfrac{16-1}{22-1} = \dfrac{15}{21} = \dfrac{5}{7}$.

Домножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение, получим

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{21}} + \sqrt{a_{22}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{21}}}{d} = \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{(4-1)7}{5} = \frac{21}{5} = 4{,}2.$$

Ответ: 4,2.

Задача №5. В строку выписали 2022 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$. Верно ли, что либо одно из них делится на 2022, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на 2022? Вывод строго обосновать.

Решение: Если среди чисел есть одно число, делящееся на 2022, то утверждение задачи верно.

Пусть теперь среди чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ нет чисел, делящихся на 2022, тогда все числа имеют ненулевые остатки от деления на 2022.

Рассмотрим теперь всевозможные суммы

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

состоящие из первых n чисел этого набора с подряд идущими номерами $1, 2, 3, \ldots, n$, где число слагаемых n может принимать любые натуральные значения от 1 до 2022. Тогда если какая-то сумма s_n делится на 2022, то утверждение задачи верно.

Пусть теперь среди сумм $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2022}$ нет чисел, делящихся на 2022. Но тогда эти суммы имеют ненулевые остатки от деления на 2022. Но поскольку ненулевых остатков от деления на 2022 имеется ровно 2021 (это остатки $1, 2, 3, \ldots, 2021$), тогда по принципу Дирихле среди чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2022}$ обязательно найдутся два числа

s_k и s_m, где $k < m$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2022. Но тогда их разность $s_m - s_k$, то есть сумма чисел

$$s_m - s_k = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) =$$
$$= a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_m$$

имеет остаток от деления на 2022, равный нулю, то есть делится на 2022, поэтому утверждение задачи верно.

Ответ: Верно.

Задача №6. Докажите, что для $a \geq 0, b \geq 0$ выполняется неравенство $(a+b)(ab+2025) \geq 180ab$.

Решение: Разделим неравенство на 4, получим

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+2025}{2} \geq 45ab.$$

Применим неравенство о средних к числам a и b, и к числам $ab + 2025$:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+2025}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab2025} = 45ab.$$

Задача №7. Найти минимальное значение выражения

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Решение: Сделаем замену переменной по формуле $t = \dfrac{1}{x^2+1} + x^2 + 1$, тогда так как

$$t^2 = \left(\frac{1}{x^2+1} + x^2 + 1\right)^2 = \frac{1}{(x^2+1)^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1) + (x^2+1)^2 =$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)^2} + x^4 + 2x^2 + 3,$$

то исходное выражение примет вид

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2} + x^4 + 2x^2 + 3 - 5x^2 - \frac{5}{x^2+1} + 1 =$$
$$= \left(\frac{1}{(x^2+1)^2} + x^4 + 2x^2 + 3\right) - 5\left(\frac{1}{x^2+1} + x^2 + 1\right) + 6 = t^2 - 5t + 6.$$

Квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - 5t + 6$ достигает минимума при $t_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2}$, поэтому возможную точку минимума найдем из уравнения

$$\frac{1}{x^2+1} + x^2 + 1 = \frac{5}{2}.$$

Снова сделав замену переменной по формуле $y = x^2+1$, получим уравнение $\frac{1}{y}+y = \frac{5}{2}$, или $2y^2-5y+2=0$. Решая квадратное уравнение, получаем, что либо $y = x^2+1 = 2$ и, значит, $x_{1,2} = \pm 1$, либо $y = x^2+1 = \frac{1}{2}$ — посторонний корень. При этом при $x = \pm 1$ минимальное значение исходного выражения равно

$$f(t_0) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = -\frac{25}{4} + 6 = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Задача №8. Функция $f(x)$ определена для всех вещественных x и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{5f(x)} - \sqrt{5f(x) - f(5+x)} \geq 5$$

при всех вещественных x. Верно ли, что $f(x) \geq 25$ для каждого вещественного x? Ответ объясните.

Решение: Перепишем неравенство так, чтобы обе части неравенства были неотрицательными, затем возведем в квадрат:

$$(\sqrt{5f(x)})^2 \geq (5 + \sqrt{5f(x) - f(5+x)})^2,$$
$$f(5+x) \geq 25 + 10\sqrt{5f(x) - f(5+x)}.$$

Откуда следует, что $f(5+x) \geq 25$. Так как x — произвольное вещественное число, то $f(x) \geq 25$ будет справедливо для любого вещественного x.

Ответ: да, верно.

Задача №9. В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

Решение 1: Найдем рекуррентную формулу, которая выражает число N_k способов для десятиклассника Васи спуститься по лестнице, состоящей из k ступенек, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки.

Если $k = 0$, тогда у Васи имеется только единственный способ остаться на начальном месте — не шагать, поэтому $N_0 = 1$.

Если $k = 1$, тогда у Васи имеется только один способ спуститься по лестнице, состоящей из одной ступеньки, то есть шагнуть на следующую ступеньку с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_1 = N_0 = 1$.

Если $k = 2$, тогда у Васи имеется два способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с первой ступеньки, на которую можно попасть одним способом, или перешагнуть через ступеньку с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_2 = N_0 + N_1 = 1 + 1 = 2$.

Если $k = 3$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку со второй ступеньки, на которую можно попасть двумя способами, или перешагнуть через ступеньку с первой ступеньки, на которую можно попасть одним способом, или перешагнуть через две ступеньки с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_3 = N_0 + N_1 + N_2 = 1 + 1 + 2 = 4$.

Если $k = 4$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способами, или перешагнуть через ступеньку со второй ступеньки, на которую можно попасть $N_2 = 2$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с первой ступеньки, на которую можно попасть $N_1 = 1$ способом, то есть

$$N_4 = N_1 + N_2 + N_3 = 1 + 2 + 4 = 7.$$

Если $k = 5$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 7$ способами, или перешагнуть через ступеньку с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способами, или перешагнуть через две ступеньки со второй ступеньки, на которую можно попасть $N_2 = 2$ способом, то есть

$$N_5 = N_2 + N_3 + N_4 = 2 + 4 + 7 = 13.$$

Если $k = 6$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способами, или перешагнуть через ступеньку с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 7$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способом, то есть

$$N_6 = N_3 + N_4 + N_5 = 4 + 7 + 13 = 24.$$

Если $k = 7$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способами, или перешагнуть через ступеньку с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 5$ способом, то есть

$$N_7 = N_4 + N_5 + N_6 = 7 + 13 + 24 = 44.$$

Если $k = 8$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с седьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_7 = 44$ способами, или перешагнуть через ступеньку с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способом, то есть

$$N_8 = N_5 + N_6 + N_7 = 13 + 24 + 44 = 81.$$

Наконец, если $k = 9$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с восьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_8 = 81$ способами, или перешагнуть через ступеньку с седьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_7 = 44$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способом, то есть

$$N_9 = N_6 + N_7 + N_8 = 24 + 44 + 81 = 149.$$

Так как на каждом из двух пролетов лестницы десятиклассник Вася спускается отдельно от другого пролета, поэтому нужно перемножить полученные два числа вариантов N_8 и N_9, то есть искомое число вариантов равно произведению

$$M = N_8 \cdot N_9 = 81 \cdot 149 = 12069.$$

Заметим, что нами получена рекуррентная формула $N_{k+3} = N_k + N_{k+1} + N_{k+2}$, которая справедлива для любого натурального k.

Решение 2: Заметим, на каждом из двух пролетов лестницы десятиклассник Вася спускается отдельно от другого пролета, поэтому можно найти число способов спуститься для каждого пролета в отдельности и перемножить полученные два числа вариантов.

Решим задачу для пролета, состоящего из 8 ступенек. Будем нумеровать ступеньки цифрами от 0 до 8, где цифра 0 означает самую верхнюю ступеньку, цифра 8 — самую нижнюю ступеньку, а один шаг будем обозначать в виде $a - b$, где a и b — номера ступенек, на которых находился Вася за время этого шага. Также будем писать число ступенек, которые преодолел Вася за время шага.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки на третью ступеньку не более двух раз. Он может перепрыгнуть через две ступеньки два раза несколькими способами.

Если оставшиеся две ступеньки он преодолевает одним шагом, то имеется всего три варианта:

Шаги	0-3-6-8	0-3-5-8	0-2-5-8
Число ступенек	3, 3, 2	3, 2, 3	2, 3, 3

Если же оставшиеся две ступеньки он преодолевает двумя шагами, то имеется всего шесть вариантов:

Шаги	0-3-6-7-8	0-3-4-5-8	0-1-2-5-8
Число ступенек	3, 3, 1, 1	3, 1, 1, 3	1, 1, 3, 3
Шаги	0-3-4-7-8	0-1-4-5-8	0-1-4-7-8
Число ступенек	3, 1, 3, 1	1, 3, 1, 3	1, 3, 1, 3

Таким образом, получаем $n_2 = 9$ вариантов.

Вася перепрыгнуть через две ступеньки один раз несколькими способами, для каждого варианта запишем для краткости только число ступенек.

Число	3, 1, 1, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 2	3, 1, 1, 2, 1	3, 1, 2, 1, 1	3, 2, 1, 1, 1
ступенек	3, 1, 2, 2	3, 2, 1, 2	3, 2, 2, 1		
	1, 3, 1, 1, 1, 1	1, 3, 1, 1, 2	1, 3, 1, 2, 1	1, 3, 2, 1, 1	1, 3, 2, 2
	1, 1, 3, 1, 1, 1	1, 1, 3, 1, 2	1, 1, 3, 2, 1		
	2, 3, 1, 1, 1	2, 3, 1, 2	2, 3, 2, 1		

Полученное число вариантов нужно умножить на 2 из-за симметрии относительно середины лестничного пролета. Таким образом, получаем $n_1 = 2 \cdot 19 = 38$ вариантов.

Наконец, Вася может ни одного раза не перепрыгнуть через две ступеньки. В этом случае он может несколько раз перепрыгнуть через одну ступеньку.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку четыре раза, то такой вариант один: 0-2-4-6-8.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две единицы рядом с тремя двойками.

При этом есть четыре варианта расставить единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 2, 1, 1	2, 2, 1, 1, 2	2, 1, 1, 2, 2	1, 1, 2, 2, 2

А также есть $C_4^2 = 6$ — шесть вариантов расставить единички не рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 2, 1	2, 1, 2, 2, 1	1, 2, 2, 2, 1	2, 1, 2, 1, 2
	1, 2, 2, 1, 2	1, 2, 1, 2, 2		

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки рядом с четырьмя единицами.

При этом есть пять вариантов расставить двойки рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 1, 1, 1	1, 2, 2, 1, 1, 1	1, 1, 2, 2, 1, 1	1, 1, 1, 2, 2, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 2			

А также есть $C_5^2 = 10$ — десять вариантов расставить двойки не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 1, 1	2, 1, 1, 2, 1, 1	2, 1, 1, 1, 2, 1	2, 1, 1, 1, 1, 2
	1, 2, 1, 2, 1, 1	1, 2, 1, 1, 2, 1	1, 2, 1, 1, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 1
	1, 1, 2, 1, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2		

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну двойку рядом с шестью единицами, то есть имеется семь вариантов.

Число ступенек	2, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2	

Наконец, если Вася вообще не перепрыгивал через ступеньки, тогда имеется только один вариант: 0-1-2-3-4-5-6-7-8 с числом ступенек 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Поэтому если Вася не перепрыгивал через две ступеньки ни одного раза, то число вариантов равно $n_0 = 1 + 4 + 6 + 5 + 10 + 7 + 1 = 34$.

Таким образом, искомое число вариантов для пролета из 8 ступенек равно

$$N_8 = n_2 + n_1 + n_0 = 9 + 38 + 34 = 81.$$

Теперь решим задачу для пролета, состоящего из 9 ступенек. Будем нумеровать ступеньки цифрами от 0 до 9, где цифра 0 означает самую верхнюю ступеньку, цифра 9 — самую нижнюю ступеньку/

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки на третью ступеньку не более трех раз.

Если Вася перепрыгнул через две ступеньки на третью ступеньку три раза, то имеется только один вариант: 0-3-6-9. Поэтому получаем $m_3 = 1$ вариант.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки два раза несколькими способами. Оставшиеся три ступеньки он может преодолеть по разному.

Если он один раз перепрыгивает через одну ступеньку, то имеется двенадцать вариантов:

Шаги	0-3-6-8-9	0-3-5-8-9	0-2-5-8-9
Число ступенек	3, 3, 2, 1	3, 2, 3, 1	2, 3, 3, 1
Шаги	0-3-6-7-9	0-3-5-6-9	0-2-5-6-9
Число ступенек	3, 3, 1, 2	3, 2, 1, 3	2, 3, 1, 3
Шаги	0-3-4-7-9	0-3-4-6-9	0-2-3-6-9
Число ступенек	3, 1, 3, 2	3, 1, 2, 3	2, 1, 3, 3
Шаги	0-1-4-7-9	0-1-4-6-9	0-1-3-6-9
Число ступенек	1, 3, 3, 2	1, 3, 2, 3	1, 2, 3, 3

Если же оставшиеся три ступеньки он преодолевает тремя шагами, то имеется всего десять вариантов:

Шаги	0-3-6-7-8-9	0-3-4-5-6-9	0-1-2-3-6-9
Число ступенек	3, 3, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 3, 3
Шаги	0-3-4-7-8-9	0-1-4-7-8-9	0-3-4-5-8-9
Число ступенек	3, 1, 3, 1, 1	1, 3, 3, 1, 1	3, 1, 1, 3, 1
Шаги	0-1-4-5-6-9	0-1-2-5-8-9	0-1-2-5-6-9
Число ступенек	1, 3, 1, 1, 3	1, 1, 3, 3, 1	1, 1, 3, 1, 3
Шаги	0-1-4-5-8-9		
Число ступенек	1, 3, 1, 3, 1		

Таким образом, получаем $m_2 = 12 + 10 = 22$ варианта.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки один раз несколькими способами. Оставшиеся шесть ступенек он может преодолеть по разному.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить три двойки рядом с одной тройкой, то есть имеется четыре варианта. Для каждого варианта запишем для краткости только число ступенек.

Число ступенек	2, 2, 2, 3	2, 2, 3, 2	2, 3, 2, 2	3, 2, 2, 2

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки и две единицы рядом с одной тройкой, то есть имеется тридцать таких вариантов.

Число	2, 2, 3, 1, 1	2, 2, 1, 1, 3	2, 1, 1, 2, 3	1, 1, 2, 2, 3	
ступенек	2, 2, 1, 3, 1	2, 1, 2, 3, 1	1, 2, 2, 3, 1	2, 1, 2, 1, 3	1, 2, 2, 1, 3
	1, 2, 1, 2, 3				
	2, 3, 2, 1, 1	2, 3, 1, 1, 2	2, 1, 1, 3, 2	1, 1, 2, 3, 2	
	2, 3, 1, 2, 1	2, 1, 3, 2, 1	1, 2, 3, 2, 1	2, 1, 3, 1, 2	1, 2, 3, 1, 2
	1, 2, 1, 3, 2				
	3, 2, 2, 1, 1	3, 2, 1, 1, 2	3, 1, 1, 2, 2	1, 1, 3, 2, 2	
	3, 2, 1, 2, 1	3, 1, 2, 2, 1	1, 3, 2, 2, 1	3, 1, 2, 1, 2	1, 3, 2, 1, 2
	1, 3, 1, 2, 2				

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить четыре единицы рядом с одной двойкой и одной тройкой, то есть имеется тридцать таких вариантов.

Число	2, 3, 1, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 1, 2, 3		
ступенек	2, 1, 3, 1, 1, 1	1, 2, 3, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 3, 1	1, 2, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 2, 3, 1
	1, 1, 1, 2, 1, 3				
	2, 1, 1, 3, 1, 1	1, 1, 2, 3, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 3		
	1, 2, 1, 3, 1, 1	1, 2, 1, 1, 3, 1	1, 1, 2, 1, 3, 1		
	3, 1, 2, 1, 1, 1	1, 3, 2, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 2, 1	1, 3, 1, 1, 1, 2	1, 1, 1, 3, 2, 1
	1, 1, 1, 3, 1, 2				
	3, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 3, 2, 1, 1	1, 1, 3, 1, 1, 2		
	1, 3, 1, 2, 1, 1	1, 3, 1, 1, 2, 1	1, 1, 3, 1, 2, 1		

Если же Вася ни разу не перепрыгнул через одну ступеньку, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить шесть единиц рядом с одной тройкой, то есть имеется семь таких вариантов.

Число ступенек	3, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 3, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 3, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 3, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 3, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 3, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 3	

Таким образом, получаем $m_1 = 4 + 30 + 30 + 7 = 71$ вариант.

Наконец, Вася может ни одного раза не перепрыгнуть через две ступеньки. В этом случае он может несколько раз перепрыгнуть через одну ступеньку.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку четыре раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну единицу рядом с четырьмя двойками, то есть имеется пять вариантов.

Число ступенек	2, 2, 2, 2, 1	2, 2, 2, 1, 2	2, 2, 1, 2, 2	2, 1, 2, 2, 2
	1, 2, 2, 2, 2			

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить три единицы рядом с тремя двойками.

При этом есть четыре варианта расставить единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 2, 1, 1, 1	2, 2, 1, 1, 1, 2	2, 1, 1, 1, 2, 2	1, 1, 1, 2, 2, 2

И есть $4 \cdot 3 = 12$ — двенадцать вариантов расставить только две единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 2, 1, 1	2, 1, 2, 2, 1, 1	1, 2, 2, 2, 1, 1	
	2, 2, 1, 1, 2, 1	2, 1, 2, 1, 1, 2	1, 2, 2, 1, 1, 2	
	2, 1, 1, 2, 2, 1	2, 1, 1, 2, 1, 2	1, 2, 1, 1, 2, 2	
	1, 1, 2, 2, 2, 1	1, 1, 2, 2, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 2	

А также есть $C_4^3 = 4$ — четыре варианта расставить единички не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 2, 1	1, 2, 2, 1, 2, 1	1, 2, 1, 2, 2, 1	1, 2, 1, 2, 1, 2

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки рядом с пятью единицами.

При этом есть шесть вариантов расставить двойки рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 2, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 2, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 2, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 2		

А также есть $C_6^2 = 15$ — пятнадцать вариантов расставить двойки не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 1, 1, 1	2, 1, 1, 2, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 2, 1, 1	2, 1, 1, 1, 1, 2, 1
	2, 1, 1, 1, 1, 1, 2	1, 2, 1, 2, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 2, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 2, 1
	1, 2, 1, 1, 1, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 2, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 2
	1, 1, 1, 2, 1, 2, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 2	1, 1, 1, 1, 2, 1, 2	

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну двойку рядом с семью единицами, то есть имеется восемь вариантов.

Число	2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1
ступенек	1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2

Наконец, если Вася вообще не перепрыгивал через ступеньки, тогда имеется только один вариант: 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9 с числом ступенек 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Поэтому если Вася не перепрыгивал через две ступеньки ни одного раза, то число вариантов равно $n_0 = 5 + 4 + 12 + 4 + 6 + 15 + 8 + 1 = 55$.

Таким образом, искомое число вариантов для пролета из 9 ступенек равно

$$N_9 = m_3 + m_2 + m_1 + m_0 = 1 + 22 + 71 + 55 = 149.$$

Наконец, искомое число вариантов равно произведению

$$M = N_8 \cdot N_9 = 81 \cdot 149 = 12069.$$

Ответ: $M = 12069$.

Задача №10. Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.

Решение: Пусть A, B, C — центры «внешних» окружностей, D — центр «внутренней» окружности. По теореме косинусов для треугольника $\triangle BDC$ получаем

$$(b+c)^2 = (b+r)^2 + (c+r)^2 - 2(b+r)(c+r)\cos\angle BDC,$$
$$2bc = 2br + 2cr + r^2 - 2(b+r)(c+r)\cos\angle BDC, \quad \cos\angle BDC = \frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)},$$

тогда получим

$$\cos^2\frac{\angle BDC}{2} = \frac{1+\cos\angle BDC}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)}\right) = \frac{r(b+c+r)}{(b+r)(c+r)},$$
$$\sin^2\frac{\angle BDC}{2} = \frac{1-\cos\angle BDC}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)}\right) = \frac{bc}{(b+r)(c+r)}.$$

Если $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, где α, β, γ — углы треугольника со сторонами x, y, z и радиусом описанной окружности R, то по теореме синусов и по теореме косинусов получим

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta} = \frac{z}{\sin\gamma} = 2R, \quad x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha,$$
$$x = 2R\sin\alpha, \quad y = 2R\sin\beta, \quad z = 2R\sin\gamma,$$
$$4R^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\beta + 4R^2\sin^2\gamma - 2\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma\cdot\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 0.$$

Подставив в эту формулу значения $\alpha = \dfrac{\angle BDC}{2}$, $\beta = \dfrac{\angle ADC}{2}$, $\gamma = \dfrac{\angle ADB}{2}$, получим

$$\frac{bc}{(b+r)(c+r)} - \frac{ac}{(a+r)(c+r)} - \frac{ab}{(a+r)(b+r)} + 2\frac{a\sqrt{bcr(b+c+r)}}{(a+r)(b+r)(c+r)} = 0,$$

то есть

$$\frac{a+r}{a}-\frac{b+r}{b}-\frac{c+r}{c}+2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=0,$$

$$\frac{r}{a}-\frac{r}{b}-\frac{r}{c}-1+2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=0,$$

$$2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=1+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}-\frac{r}{a},$$

$$4r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4r^2\frac{1}{bc}=1+2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2,$$

$$4r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4r^2\frac{1}{bc}=1+2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}+r^2\frac{1}{a^2},$$

$$4r^2\frac{1}{bc}=1-2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+r^2\frac{1}{b^2}+2r^2\frac{1}{bc}+r^2\frac{1}{c^2}-2r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}+r^2\frac{1}{a^2},$$

$$r^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ab}-\frac{2}{ac}-\frac{2}{bc}\right)-2r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+1=0.$$

Подставив в это уравнение значения $a=1$, $b=2$, $c=3$, получим

$$r^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-2r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+1=0,$$

$$-r^2\frac{23}{36}-r\frac{11}{3}+1=0,\quad 23r^2+132r-36=0,$$

решая которое, находим искомое значение радиуса r:

$$r_{1,2}=\frac{-66\pm\sqrt{66^2-23\cdot(-36)}}{23}=\frac{-66\pm 6\sqrt{11^2+23}}{23}=\frac{-66\pm 72}{23},$$

$r_1=\dfrac{-66-72}{23}=-6<0$ — посторонний корень, и $r_2=\dfrac{-66+72}{23}=\dfrac{6}{23}$ — искомое значение.

Ответ: $r=\dfrac{6}{23}$.