

▷ 6. При каких a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$

больше 1, а другой меньше 1? В ответе укажите сумму всех целых a , удовлетворяющих условию задачи.

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ |x - 2y| = 2. \end{cases}$ В ответе запишите сумму всех y , удовлетворяющих системе.

▷ 8. Если $(a, b) \square (c, d) = ac + bd$ и $(x, 3) \square (-2, 5) = 3$, то x равно...

▷ 9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость CPQ , где P — середина ребра BB_1 , а Q — центр грани $ABCD$. Эта плоскость делит объем куба на две части. В ответе записать, во сколько раз объем большей части куба больше объема меньшей части.

▷ 10. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такова, что $a_1 = 2, a_2 = 4, \dots, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n = 3, 4, \dots$. Найти число $\frac{1}{2^{199}}(a_{200} + a_{201} + \dots + a_{205})$.

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\sin^4 \pi x + \cos^4 \pi x = 0,75$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения, записанный в виде десятичной дроби.

▷ 2. Диагонали ромба равны 2 и 3. Его повернули на 90° вокруг центра. Найти площадь общей части этих двух ромбов. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$2xy + 4x^2 = 5y + 10x + 21.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = 1 - x^2, f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2} (x \neq 0)$. Найти $f(\frac{1}{2})$.

▷ 5. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 у.е., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 у.е., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 у.е. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается. В ответе укажите наименьшую стоимость пересылки.

▷ 6. При каких m неравенство

$$x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$$

выполняется при всех $x \in (1, 2)$? В ответе запишите сумму всех целых m , удовлетворяющих условию задачи.

▷ 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{0,5-x}, \\ (\sqrt{2})^{2x} = 2^{y-3,5}. \end{cases}$ В ответе укажите $x + y$.

▷ 8. Если $(b, a) \square (d, c) = bc + ad$ и $(x, 3) \square (-1, 2) = 5$, то x равно...

▷ 9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость PQR , где P, Q, R — центры граней $BB_1 C_1 C, CC_1 D_1 D$ и $ABCD$. Эта плоскость делит площадь поверхности куба на две части. Найдите, во сколько раз объем большей части больше объема полученной меньшей части.

▷ 10. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такова, что $a_1 = 3, a_2 = 2, \dots, a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, n = 3, 4, \dots$. Найдите число $\frac{1}{5^{300}}(a_{300} + a_{301} + \dots + a_{305})$.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\sin^8 2\pi x + \cos^8 2\pi x = \frac{41}{128}$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения в виде десятичной дроби.

▷ 2. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его 24 и 7. В ответе запишите сумму этих расстояний.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = a \sin x + n \cos x, f[g(x)] = |a \cos x - b \sin x|$. Найдите $f(0)$.

▷ 5. На 100 у.е. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 у.е.; набор из 35 игрушек стоит 6 у.е, а набор из 50 игрушек стоит 9 у.е. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек? В ответе укажите максимальное число игрушек.

▷ 6. При каких a оба корня уравнения

$$x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$$

меньше -1 ? В ответе запишите наименьшее целое положительное a , удовлетворяющее условию задачи.

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8, \\ 9^y = 3^{4-x}. \end{cases}$ В ответе запишите сумму всех x , удовлетворяющих данной системе.

▷ 8. Если $a \square b = ab + a + b$ и $3 \square 5 = 2 \square x$, то x равно...

▷ 9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость PQR , где P, Q, R — центры граней $BB_1 C_1 C$, $CC_1 D_1 D$ и $ABCD$. Эта плоскость делит объем куба на две части. В ответе записать, во сколько раз объем большей части куба больше объема меньшей части.

▷ 10. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такова, что $a_1 = 20$, $a_2 = 40$, \dots , $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. Найти число $\frac{1}{4^{2000}}(a_{2000} + a_{2001} + \dots + a_{2007})$.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^4 2\pi x = \cos^2 4\pi x + 1$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения в виде десятичной дроби.

▷ 2. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами при $a = 4$, $b = 10$.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$x^2 - 4xy - 5y^2 = 1996.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = 1 - x^2$, $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$ ($x \neq 0$). Найти $f\left(\frac{2019}{2020}\right)$.

▷ 5. Предполагается использовать 2000 у.е. на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Стоимость их соответственно 21 у.е., 40 у.е. и 60 у.е. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим? В ответе укажите общее число дней отдыха.

▷ 6. При каких a оба корня уравнения

$$ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$$

по модулю меньше 1? В ответе укажите наименьшее натуральное a , удовлетворяющее условию.

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \frac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32. \end{cases}$ В ответе запишите сумму всех y , удовлетворяющих системе.

▷ 8. Если $(b, a) \square (d, c) = bc - ad$ и $(x, 3) \square (1, 4) = 5$, то x равно...

▷ 9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость APQ , где P и Q — середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 C$. Эта плоскость делит объем куба на две части. В ответе записать, во сколько раз объем большей части куба больше объема меньшей части.

▷ 10. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такова, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1, \dots, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. Найти число $\frac{1}{3^{99}}(a_{100} + a_{101} + \dots + a_{105})$.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\frac{\cos^2 3\pi x}{\operatorname{tg} \pi x} + \frac{\cos^2 \pi x}{\operatorname{tg} 3\pi x} = 0$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения в виде десятичной дроби.

▷ 2. В трапеции большее основание равно 25, одна из боковых сторон равна 15. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданной боковой стороной и нижним основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$x^2 - 4xy - 5y^2 = 1999.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$, $f[g(x)] = |2 \cos x + 3 \sin x|$. Найти $f(2)$.

▷ 5. Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки имеются полуторатонки, трехтонки и пятитонки. На полуторатонке можно перевести за один раз 26 деревьев, на трехтонке — 45 деревьев, на пятитонке — 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 у.е., для трехтонки — 15 у.е., для пятитонки — 24 у.е. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается. Чему равна наименьшая стоимость перевозок?

▷ 6. Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 4. Корни этого уравнения являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем 2. Найдите a, b, c . В ответе запишите

$$\sqrt{7}|a + b + c|.$$

▷ 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5}, \\ 5^{2x} = \frac{1}{25} \cdot 5^y. \end{cases}$ В ответе укажите $x + y$.

▷ 8. Определим операцию ∇ с переменными a и b следующим образом:

$$a \nabla b = \sqrt{a + b}.$$

Решить уравнение $(x \nabla 22) - (x \nabla 10) = 2$.

▷ 9. Боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны: $SA = 3$; $SB = 2$; $SC = 4$. Известно, что $SA \perp SB$; $SA \perp SC$. Угол BSC равен 30° . Найдите объем пирамиды.

▷ 10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна S . После того, как из этой прогрессии вычеркнули каждый пятый член, начиная с третьего (3-й, 8-й, 13-й, ...), сумма возросла и стала равна $\frac{7}{11}S$. Найдите сумму первого члена и знаменателя прогрессии при $S = -1$.

Отборочный тур, 11 класс, 5 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\sin^4 \pi x + \cos^4 \pi x = 0,75$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения, записанный в виде десятичной дроби.

▷ 2. Диагонали ромба равны 2 и 3. Его повернули на 90° вокруг центра. Найдите площадь общей части этих двух ромбов. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$2xy + 4x^2 = 5y + 10x + 21.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = 1 - x^2$, $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$ ($x \neq 0$). Найдите $f(\frac{1}{2})$.

▷ 5. На покупку тетрадей в клетку и линейку можно затратить не более 1 рубля 40 коп. Тетрадь в клетку стоит 3 коп., тетрадь в линейку — 2 коп. При закупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более, чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, причем из всех вариантов, дающих это максимальное количество, надо найти такой, при котором число тетрадей в линейку минимально. Сколько тетрадей в клетку и сколько в линейку можно закупить при указанных условиях? В ответе укажите число тетрадей в клетку.

▷ 6. Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью -2 . Корни этого уравнения являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{5}{8}$. Найти a, b, c , если известно, что корни уравнения по абсолютной величине не превосходят $\frac{3}{2}$. В ответе запишите

$$7(a + b + c).$$

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ |3x - y| = 1. \end{cases}$ В ответе запишите сумму всех x , удовлетворяющих данной системе.

▷ 8. Определим операцию \otimes с переменными a и b следующим образом:

$$a \otimes b = \frac{2a + b}{a - b}.$$

Решить неравенство $3 \otimes x \geq (x - 2) \otimes x$. В ответе запишите наименьшее целое решение.

▷ 9. В вершине A прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сидит паук, а в центре противоположной грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ — муха. Какое минимальное расстояние (по поверхности параллелепипеда) от паука до мухи, если стороны параллелепипеда равны: $AA_1 = 4$; $AB = 1$; $AD = 2$. В ответе укажите квадрат этого расстояния.

▷ 10. Первый член арифметической прогрессии равен b , а ее разность равна 5 . Найти сумму наибольшего и наименьшего значений параметра b , для которых сумма n членов этой прогрессии достигает своего минимального значения при $n = 300$.

Отборочный тур, 11 класс, 6 вариант

▷ 1. Решите уравнение $\sin^4 \pi x + \cos^4 \pi x = 0,75$. В ответе укажите наименьший положительный корень уравнения, записанный в виде десятичной дроби.

▷ 2. Диагонали ромба равны 2 и 3 . Его повернули на 90° вокруг центра. Найти площадь общей части этих двух ромбов. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всех возможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$2xy + 4x^2 = 5y + 10x + 21.$$

▷ 4. Пусть $g(x) = 1 - x^2$, $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$ ($x \neq 0$). Найти $f(\frac{1}{2})$.

▷ 5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — $0,2$ тонны, большой блок весит $3,6$ тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

▷ 6. Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 2. Корни этого уравнения являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{3}{5}$. Найдите a, b, c , если известно, что корни уравнения по абсолютной величине не превосходят 1. В ответе запишите

$$7(a + b + c).$$

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$ В ответе запишите утроенное произведение всех y , удовлетворяющих системе.

▷ 8. Определим операцию \otimes с переменными a и b следующим образом:

$$a \otimes b = \frac{ab}{a - b}.$$

Решить неравенство $3 \otimes x \geq (x - 2) \otimes x$. В ответе запишите сумму целых решений.

▷ 9. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите квадрат расстояния между диагоналями AD_1 и BD .

▷ 10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна S . После того, как из этой прогрессии вычеркнули каждый второй член, начиная с четвертого (4-й, 6-й, 8-й, ...), сумма уменьшилась и стала равна $\frac{19}{18}S$. Найдите второй член этой прогрессии при $S = 2016$.

Отборочный тур, 11 класс, 7 вариант

▷ 1. Найдите сумму всех решений уравнения $\cos 2\pi x + 4 \sin^2 \pi x = \sqrt{3} \sin 2\pi x$, удовлетворяющих неравенству $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$. Ответ укажите записать в виде десятичной дроби.

▷ 2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N . Длина отрезка MN равна 1. Найдите величину угла BAD (в градусной мере).

▷ 3. Найдите сумму $x + y$ всевозможных пар натуральных чисел x и y , удовлетворяющих уравнению:

$$6xy + 2x = 15y + 224.$$

▷ 4. Заданы функции $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 1 \\ 5 - 2x, & x < 1 \end{cases}$ и $g(x) = x^2 - 2x$. Найдите $(b + 2)a$, a — где наибольший корень, а b — наименьший корень уравнения $f(2 - |x|) = g(1 + x)$.

▷ 5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру необходимо 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим? В ответе укажите число 12-квартирных домов.

▷ 6. Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 1. Корни этого уравнения являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Найти a, b, c , если известно, что корни уравнения по абсолютной величине меньше 1. В ответе запишите

$$\sqrt{7}(a + b + c).$$

▷ 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ |2x - 3y| = 1. \end{cases}$ В ответе запишите произведение всех x , умноженное на 49.

▷ 8. Определим операцию \otimes с переменными a и b следующим образом:

$$a \otimes b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Найдите произведение корней этого уравнения.

▷ 9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость APQ , где P и Q — середины ребер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$. В каком отношении эта плоскость делит поверхность куба на две части? Ответ дать в виде десятичного числа, большего единицы.

▷ 10. Найти сумму общих членов двух арифметических прогрессий

$$51, 72, 93, \dots, 6981,$$

$$79, 156, 233, \dots, 6932.$$

Отборочный тур, 11 класс, 8 вариант

▷ 1. Найти сумму всех решений уравнения $2 - 6 \cos \pi x \sin \pi x = \cos 4\pi x$, удовлетворяющих неравенству $18x^2 - 3x - 1 \leq 0$, ответ записать в виде десятичной дроби.

▷ 2. Основание равнобедренного треугольника равно b , а угол при основании равен α . Прямая пересекает продолжение основания в точке M под углом β и делит пополам ближайшую к M боковую сторону треугольника. При каком b площадь четырехугольника, отсекаемого прямой от данного треугольника, будет равна $36 - \sqrt{27}$, если $\alpha = 75^\circ, \beta = 45^\circ$.

▷ 3. Известно, что n -значное число, оканчивающееся нулями вида $69300 \dots 0$, имеет 1200 различных делителей. Найдите n .

▷ 4. Заданы функции $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > -1 \\ -1 - 2x, & x \leq -1 \end{cases}$ и $g(x) = x^2 - x$. Найдите $a + 2b$, a — где наибольший корень, а b — наименьший корень уравнения $f(1 - |x|) = g(2 + x)$.

▷ 5. Ученики второго, третьего и четвертого классов собирали макулатуру. Второклассники работали каждый по три дня, третьеклассники — по 12 дней, четвероклассники — по 16 дней. При этом каждый второклассник собрал по 30 кг, каждый третьеклассник — по 130 кг, каждый четвероклассник — по 170 кг. Все дети вместе отработали 95 дней. Сколько учеников каждого класса участвовало в работе, если общее количество собранной макулатуры оказалось максимальным? В ответе укажите число третьеклассников.