XXVIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2020»

Заключительный тур

16 февраля 2020 года

10 класс

▷ **1.** Найдите пару положительных десятичных дробей x и y, удовлетворяющих равенству:

$$x^2+y^2=\frac{1945}{2020}.$$

▷ **2.** Найти все натуральные числа, которые увеличиваются в 2 раза от перестановки его последней цифры на первое место.

▷ **3.** Сколько различных решений имеет неравенство $1950 \leqslant [a] \leqslant 2020$? Если $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее

$$a=\sqrt[3]{m^3-m+\sqrt[3]{m^3-m+\cdots+\sqrt[3]{m^3-m}}}+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\cdots+\sqrt{n^2-n}}}.$$

▷ **4.** Дан многочлен $f(x)=x^{1945}+a_1x^{1944}+\cdots+a_{1945}$. Игроки поочередно заменяют один из коэффициентов a_i (каждый коэффициент a_i используется только один раз) произвольным вещественным числом. Первый игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело как можно меньше различных вещественных корней, второй игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело как можно больше различных вещественных корней. На что может рассчитывать каждый из игроков?

▷ **5.** Доказать, что если числа a, b, c положительны, то хотя бы одно из чисел $(a+b+c)^2-8ac$, $(a+b+c)^2-8bc$, $(a+b+c)^2-8ab$ положительно.

▷ **6.** Сколько решений имеет уравнение?

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+\{x\}=\frac{7x-2}{3}.$$

▷ **7.** Для каждого натурального n $(n>1)$ имеет место равенство $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$, где $a_0=1$, $a_1=2$.
Найдите:

$$\frac{a_{1945}}{a_{1946}}+\frac{a_{1946}}{a_{1947}}+\cdots+\frac{a_{2019}}{a_{2020}}.$$

▷ **8.** Доказать, что для всякого треугольника ABC имеет место равенство

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\geqslant\frac{9}{4},$$

m_a, m_b, m_c - медианы на стороны треугольника с длинами a, b, c соответственно.

▷ **9.** На гиперболе $y=\frac{1}{x}$ взяты две точки $M(x_0;y_0)$ и $N(-x_0;-y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Найдите площадь треугольника с вершинами в этих трёх точках.

▷ **10.** Пусть A – множество, состоящее из 100 элементов. Сколько решений имеет уравнение

$$X\cup Y\cup Z=A,$$

если X, Y, Z – подмножества множества A.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОБИЛЬНЫХ ТЕЛЕФОНОВ ВО ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАПРЕЩЕНО!!!

XXVIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2020»

Заключительный тур

16 февраля 2020 года

10 класс

▷ **1.** Найдите пару положительных десятичных дробей x и y, удовлетворяющих равенству:

$$x^2+y^2=\frac{1945}{2020}.$$

▷ **2.** Найти все натуральные числа, которые увеличиваются в 2 раза от перестановки его последней цифры на первое место.

▷ **3.** Сколько различных решений имеет неравенство $1950 \leqslant [a] \leqslant 2020$? Если $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее

$$a=\sqrt[3]{m^3-m+\sqrt[3]{m^3-m+\cdots+\sqrt[3]{m^3-m}}}+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\cdots+\sqrt{n^2-n}}}.$$

▷ **4.** Дан многочлен $f(x)=x^{1945}+a_1x^{1944}+\cdots+a_{1945}$. Игроки поочередно заменяют один из коэффициентов a_i (каждый коэффициент a_i используется только один раз) произвольным вещественным числом. Первый игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело как можно меньше различных вещественных корней, второй игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело как можно больше различных вещественных корней. На что может рассчитывать каждый из игроков?

▷ **5.** Доказать, что если числа a, b, c положительны, то хотя бы одно из чисел $(a+b+c)^2-8ac$, $(a+b+c)^2-8bc$, $(a+b+c)^2-8ab$ положительно.

▷ **6.** Сколько решений имеет уравнение?

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+\{x\}=\frac{7x-2}{3}.$$

▷ **7.** Для каждого натурального n $(n>1)$ имеет место равенство $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}$, где $a_0=1$, $a_1=2$.
Найдите:

$$\frac{a_{1945}}{a_{1946}}+\frac{a_{1946}}{a_{1947}}+\cdots+\frac{a_{2019}}{a_{2020}}.$$

▷ **8.** Доказать, что для всякого треугольника ABC имеет место равенство

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\geqslant\frac{9}{4},$$

m_a, m_b, m_c - медианы на стороны треугольника с длинами a, b, c соответственно.

▷ **9.** На гиперболе $y=\frac{1}{x}$ взяты две точки $M(x_0;y_0)$ и $N(-x_0;-y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Найдите площадь треугольника с вершинами в этих трёх точках.

▷ **10.** Пусть A – множество, состоящее из 100 элементов. Сколько решений имеет уравнение

$$X\cup Y\cup Z=A,$$

если X, Y, Z – подмножества множества A.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОБИЛЬНЫХ ТЕЛЕФОНОВ ВО ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАПРЕЩЕНО!!!