

Задача 1

Шофёр автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами от 537000 до 537999, а в другой - с номерами от 462000 до 462999. В какой из катушек "счастливых" билетов больше (т.е. таких, что сумма первых трёх цифр равна сумме следующих трёх цифр)?

Решение: Если заменить каждую цифру "счастливого" билета на ее дополнение до 9, т.е. 0 на 9, 1 на 8 и т.д., то полученный билет тоже будет "счастливым" причём если билет был из первой катушки, то полученный билет будет из второй катушки. Отсюда следует, что в каждой катушке одно и то же количество "счастливых" билетов.

Задача 2

$$12(x^2 + xy + y^2) = 4(x^2 + xz + z^2) = 3(y^2 + yz + z^2)$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a \mid x - y \\ y^2 + yz + z^2 = 4a \mid y - z \\ x^2 + xz + z^2 = 3a \mid z - x \end{cases}$$

$$0 = a(x - y + 4y - 4z + 3z - 3x)$$

$$3y - 2x - z = 0$$

$$z = 3y - 2x$$

$$x^2 + 3yx - 2x^2 + 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3a$$

$$3x^2 - 9xy + 9y^2 = 3a$$

$$x^2 - 3xy + 3y^2 = a = x^2 + xy + y^2$$

$$4xy = 2y^2$$

а) $y = 0$ ($a \geq 0$)

$$z = -2x$$

$$x^2 = a, |x| = \sqrt{a} > 0$$

$$z^2 = 4a, |z| = 2\sqrt{a}$$

$$x^2 + xz + z^2 = 3a, x \cdot z < 0 \ a > 0$$

$$(\sqrt{a}; 0; -2\sqrt{a})$$

$$(-\sqrt{a}; 0; 2\sqrt{a})$$

б) $y = 2x$

$$x^2 + 2x^2 + 4x^2 = a$$

$$x^2 = \frac{a}{7}, z = 6\sqrt{\frac{a}{7}} \pm 2\sqrt{\frac{a}{7}}$$

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{a}{7}}, \sqrt{\frac{a}{7}} = t$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

$$t \geq 0$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -4t \end{cases}$$

Ответ:

$(b, 2b, 4b)$, b — любое действительное число

$(-c, 0, 2c)$, $l, c \in (-\infty; +\infty)$

Задача 3

Разложите на простые множители число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$

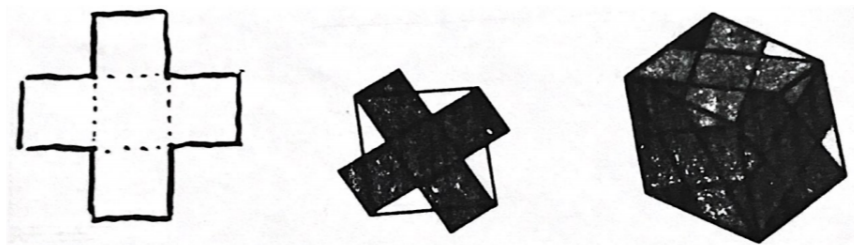
Решение: Догадаться до этого разложения можно с помощью следующего соображения: если $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, то $f(x) + f(-x) = -2(a + b + c)x^2 + 2f(0)$, т.е. при $a + b + c = 0$ сумма $f(x) + f(-x)$ постоянна. В нашем случае можно взять $f(x) = (x - 10) \cdot (x + 2)(x + 8)$, тогда заданное число равно $f(999) - 2f(0) = -f(-999) = 1009 \cdot 997 \cdot 991$. Легко проверить, что все три множителя здесь простые.

Ответ: $1009 \cdot 997 \cdot 991$

Задача 4

Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги. Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика. Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить поверхность кубика?

Решение: Можно. На каждую грань кубика наклеивается одна из фигур так, как показано на рисунке. а затем все уголки загибаются!



Задача 5

Можно ли написать подряд 17 целых числа так, чтобы сумма любых четырех соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел равнялась 2020?

Решение:

$$\begin{cases} 3a + b < 0 \\ 13a + 4b = 2020 \end{cases}$$

$$4b = 2020 - 13a < -12a$$

$$a > 2020$$

$$2020 - 13a : 4 \longrightarrow a : 4$$

$$a = 2024, b = -4558$$

Задача 6

Сколько целых решений имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1945$?

Решение: Если целые числа x, y удовлетворяют данному уравнению, то $\sqrt{y} = 1945 - \sqrt{x}$, откуда

$$y = 1945^2 - 2 \cdot 1945\sqrt{x} + x$$

и, следовательно, $\sqrt{x}$ - рациональное число, так что x - квадрат рационального числа. Но тогда поскольку x - целое, то x -точный квадрат и, аналогично, число y также есть точный квадрат. Поэтому число решений данного уравнения равно числу представлений числа 1945 в виде суммы двух целых неотрицательных слагаемых с учетом порядка слагаемых, т.е равно 1946

Ответ: 1946

Задача 7

Пусть для каждого натурального $n (n \geq 1)$

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$

Найдите

$$\frac{a_{1945}}{a_{1946}} + \frac{a_{1946}}{a_{1947}} + \dots + \frac{a_{2019}}{a_{2020}}$$

если $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Докажите по индукции, что $a_n = \frac{1}{n!} (n \geq 0)$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n-1)}{n!(n+1)} - \frac{(n-2)}{(n-1)! \cdot n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{(n-3)!(n-2) \cdot n(n+1)} - \frac{1}{(n-3)!(n-1)n(n+1)} = \\ &= \frac{n-1-n+2}{(n-3)!(n-2)(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1946 + 1947 + \dots + 2020 = \frac{(1946 + 2020)}{2} 75 = 148725 \end{aligned}$$

Ответ: 148725

Задача 8

Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые являются точными квадратами и остаются таковыми после приписывания к ним справа единицы (в десятичной записи).

Решение: Мы должны построить бесконечно много пар m, k натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $10m^2 + 1 = k^2$. Первую такую пару просто подбираем: $m = 6$, $k = 19$ ($6^2 = 36$, $19^2 = 361$). Далее мы замечаем, что если $10m^2 + 1 = k^2$, то $10(2mk)^2 + 1 = 40m^2(10m^2 + 1) + 1 = 400m^4 + 40m^2 + 1 = (20m^2 + 1)^2$, поэтому по паре m, k , удовлетворяющей нашему условию, мы можем построить пару $(2mk, 20m^2 + 1)$ заведомо больших чисел, также удовлетворяющих нашему условию. Это позволяет найти бесчисленное множество таких пар.

Задача 9

Переменные x, y, z, t таковы, что справедливо неравенство

$$8 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 128$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t}$$

Решение:

$$\frac{x}{y} \geq \frac{8}{y} \geq \frac{8}{z}, \quad \frac{z}{t} \geq \frac{z}{128}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} \geq \frac{8}{z} + \frac{z}{128}$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\forall z > 0$$

$$\frac{8}{z} + \frac{z}{128} \geq 2\sqrt{\frac{8}{128}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{4}{64}} = \frac{1}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{x}{y} + \frac{z}{t} \geq \frac{1}{2}$$

при $x = 8, t = 128, z = y = \sqrt{8 \cdot 128} = 32$

Проверка:

$$\frac{8}{32} + \frac{32}{128} = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{условие выполнено.}$$

Наименьшее значение, которое может принимать выражение $\frac{x}{y} + \frac{z}{t}$ равно $\frac{1}{2}$.

Задача 10

В строку в порядке возрастания записали целые числа от 1945 до 2020. После этого под каждым двумя соседними числами записали их сумму, образовав новую строку. Затем под каждой парой соседних чисел получившейся строки записали их сумму, образовав третью строку, и так далее до тех пор, пока не получилась строка, состоящая из одного числа. Какое это число?

Решение:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d$$

$$2a + d, 2a + 3d, 2a + 5d, 2a + 7d$$

$$4a + 4d, 4a + 8d, 4a + 12d$$

$$8a + 12d, 8a + 20d$$

$$16a + 32d$$

Заметим, что каждая n -я строка является арифметической прогрессией

Номер строки	Первый член	Разность	Число членов
0	a	d	n
1	$2a + d$	$2d$	$n - 1$
2	$4a + 4d$	$4d$	$n - 2$
...	...	...	...
k	$2^k a + d(2d_{k-1} + 2_{k-1})$	$2^k d$	$n - k$
...	...	...	...

d_i - коэффициент при d в k -й строке

$$d_k = 2d_{k-1} + 2^{k-1}$$

$$d_1 = 2d_0 + 1 = 1$$

$$d_2 = 2d_1 + 2 = 4$$

$$d_3 = 2d_2 + 2^2 = 12$$

$$\begin{cases} d_k = 2d_{k-1} + 2^{k-1} \\ d_{k+1} = 2d_k + 2^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{k+1} = 2^2 d_{k-1} + 2^k + 2^k \\ d_{k-1} = 2d_{k-2} + 2^{k-2} \end{cases}$$

$$d_{k+1} = 2^3 d_{k-2} + 3 \cdot 2^k$$

$$d_{k+1} = (k + 1)2^k$$

$$d_0 = 0,$$

$$d_1 = 1,$$

$$d_2 = 4,$$

$$d_3 = 12$$

.....

$$a_k = 2^{k-1}(2a + kd), \text{ первый член в } k\text{-ой строке}$$

$$d = 1$$

$$a = 1945$$

$$k = 75$$

Ответ: $a_{75} = 2^{74}(3890 + 75) = 2^{74} \cdot 3965$