Задача 1

Шофёр автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами от 945000 до 945999, а в другой - с номерами от 054000 до 054999. В какой из катушек "счастливых"билетов больше (т.е.е таких, что сумма первых трёх цифр равна сумме следующих трёх цифр)?

Решение: Если заменить каждую цифру "счастливого"билета на ее дополнением до 9, т.е. 0 на 9, 1 на 8 и т.д., то полученный билет тоже будет "счастливым причём если билет был из первой катушки, то полученный билет будет из второй катушки. Отсюда следует, что в каждой катушке одно и то же количество "счастиливых"билетов.

Задача 2

Если 2 км пройти пешком, 3 км проехать на велосипеде и 20 км - на мотоцикле, то потребуется 1 ч 6 мин; если 5 км пройти пешком, 8 км проехать на велосипеде и 30 км - на мотоцикле, то потребуется 2 ч 24 мин. Эти данные позволяют узнать время, необходимое для того, чтобы пройти 4 км пешком, проехать 5 км на велосипеде и 80 км - на мотоцикле. Найти это время.

Решение: Пусть $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ - скорость ходьбы и езды на велосипеде и мотоцикле; тогда по условию, выполняются равенства

$$\begin{cases} 2x + 3y + 20z = 66 \\ 5x + 8y + 30z = 144 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x + 8y = 66 - 20z \\ 5x + 8y = 144 - 30z \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} x = 96 - 70z \\ y = -42 + 40z \end{cases}$$

а тогда

$$4x + 5y + 80z = 4(96 - 70z) + 5(40z - 42) + 80z = 174$$

так что искомое время равно 2 ч 54 мин

Задача 3

Даны три отрезка, длины которых a, b, c. С помощью циркуля и линейки постройке отрезок длина которого x, если

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Решение:

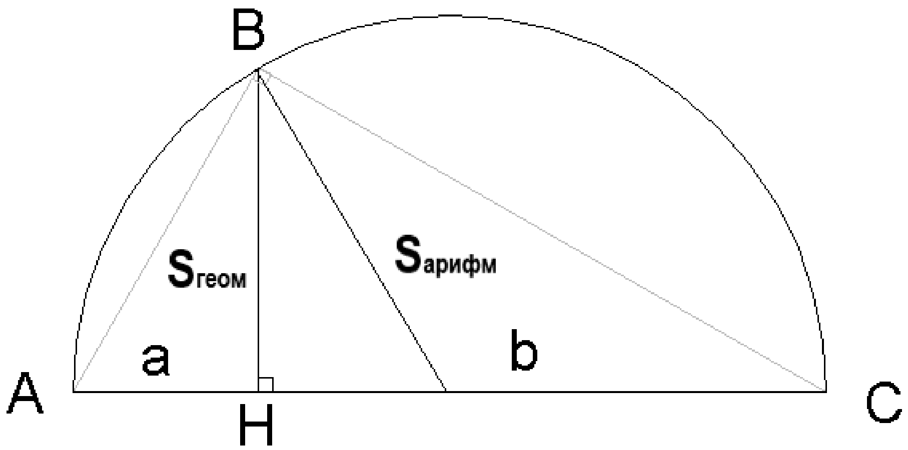
$$\sqrt{y} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$y = a + b + 2\sqrt{ab} = 2\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}\right)$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{c}$$

$$x = 2(S(a;y) + S(c,y))$$

S(a;y) - арифметическое; S(c,y) - геометрическое.



Задача 4

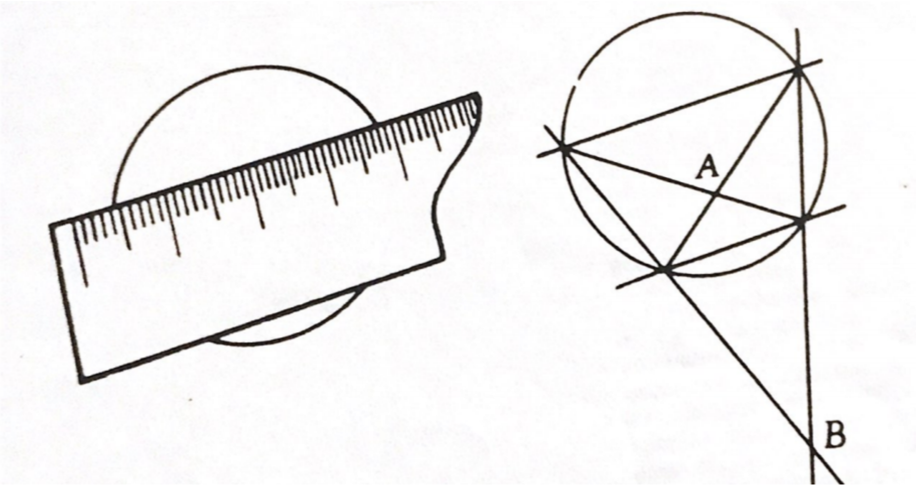
В Великобритании и США температуру принято измерять по шкале Фаренгейта, по которой температура плавления льда составляет 32 градуса, а температура кипения воды 212 градусов. Существует ли температура, при которой количество градусов по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта будет совпадать?

Решение: Так как обе шкалы равномерные, мы можем написать связь между температурами по Фаренгейту - и по Цельсию - в виде $= a + b$. Подставив $= 0$ получаем, что $b = 32$, а при $= 100$ получаем $212 = 100a + 32$, откуда $a = 1.8$. Теперь из уравнения $= 1.8 + 32$, получаем, что -40 градусов Цельсия температура по Фаренгейту также будет равна -40.

Задача 5

Как найти центр нарисованной окружности, если в вашем распоряжении лишь карандаш и обычная линейка с параллельными краями?

Решение: Наложим линейку на окружность так, чтобы по разные стороны были видны дуги разной длины. Затем проделаем построение, как показано на рисунке справа. Прямая AB проходит через центр окружности. Проделаем ещё одно такое же построение, наложив линейку по-другому, и мы получим ещё одну прямую, проходящую через центр окружности



Задача 6

Разложите число 9889 в сумму натуральных чисел таким образом, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

Решение:

$$9889 = 2 + 2 + 3 \cdot 3295$$

В искомом разложении не могут присутствовать числа > 4, потому что такое число n можно заменить числами 2, n-2, и произведение увеличится. Если в разложении присутствуют четверки, мы можем заменить каждую из них парой двоек, не изменив произведения. Единиц тоже быть не может: мы приплюсуем единицу к любому другому числу, и произведение увеличится. Значит, в одном из искомых наборов стоят только тройки и двойки. Если есть 3 двойки, мы заменим их двумя тройками, и произведение опять увеличится. Итак, наш набор содержит не более двух двоек, остальные числа набора – тройки.

Задача 7

На доске записаны натуральные числа от 1 до n; разрешается заменить любые два числа абсолютной величиной их разности. Можно ли многократным применением этой операции получить число 0, если: а) $n = 2020$; б) $n = 1945$.

Решение: Пусть количество чисел $n > 4$. При $n > 4$ из чисел $n-3$, $n-2$, $n-1$ и n тремя операциями можно получить сначала две единицы, а затем 0, и обратная. Задача сводится к оставшимся $n-4$ числам. Поэтому достаточно рассмотреть $n = 1, 2, 3, 4$. Ясно, что при $n = 3$ и $n = 4$ ответ на вопрос положительный, а при $n = 1$ и $n = 2$ – отрицательный.

Таким образом, получить число 0 можно при $n = 4k + 3$ и при $n = 4k$.

Ответ: а) да - $2020 = 4 \cdot 505$
б) нет - $1945 = 4 \cdot 486 + 1$

Задача 8

Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 63, у которого сумма цифр равна 63.

Решение: Единственное семизначное число с суммой цифр 63 равно 9 999 999 и на 63 не делится, так как не делится на 7. Восьмизначные числа, начинающиеся с 1 и удовлетворяющие условию задачи, содержат кроме единицы цифру 8 и шесть цифр 9, и наименьшим из них, делящимся на 7, является, как легко видеть, число 19 899 999. Это число и будет решением задачи.

Задача 9

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 такие, что $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B = 1 : 2$. При пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1 образуется треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади треугольника ABC.

Решение: Ясно, что $_{AA_1B} = S_{BB_1C} = S_{CC_1A} = \frac{S_{ABC}}{3}$. Найдём площадь треугольника AC_1Y. Для этого проведем отрезок A_1C_2, параллельный отрезку CC_1. Так как $BC_2 : BC_1 = 1 : 3$, то $BC_2 = \frac{2AB}{9}$, и поэтому $AY : AA_1 = AC_1 : AC_2 = \frac{3}{7}$. Следовательно, $\frac{S_{AC_1Y}}{S_{AA_1B}} = (\frac{AY}{AA_1})(\frac{AC_1}{AB}) = \frac{1}{7}$ и, значит, $S_{AC_1Y} = \frac{S_{ABC}}{21}$. Аналогично, $S_{BA_1X} = S_{CB_1Z} = \frac{S_{ABC}}{21}$. Поэтому $S_{AYZB_1} = S_{CZXA_1} = S_{BXYC_1} = \frac{5S_{ABC}}{21}$ и $S_{XYZ} = S_{ABC} - \frac{3}{21}S_{ABC} - \frac{15}{21}S_{ABC} = \frac{1}{7}S_{ABC}$.

Задача 10
Найдите все пары натуральных чисел (m, n), удовлетворяющие уравнению

$$19m + 45n = 2020$$

Решение:

$$5(m + 2n - 89) = 7(225 - 2m - 5n)$$

$$\begin{cases} m = 45t - 5 \\ n = -19t + 47 \\ t \in Z \end{cases}$$

$$45t - 5 \geq 1,\ t > 1$$

$$-19t + 47 \geq 1,\ t \leq 2$$

$$t = 1(40, 28)$$

$$t = 2(85, 9)$$