Задача 1

Если двузначное число разделить на произведение, то получится в частном 3 и в остатке 9. Найдите это число.

Решение: В задаче же первое условие

$$10x + y = 3xy + 9$$

$$1 \geq x < 9, \quad 1 \geq y \geq 9$$

Отсюда

$$x = \frac{9 - y}{10 - 3y}$$

и после очевидного перебора значений $y = 1, 2, 3$ находим единственное число **63**.

Задача 2

Возможно ли на окружности расставить числа $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ так, чтобы сумма любых трех последовательно взятых чисел не превосходила а) 13, б) 14, в) 15?

Решение: Не считая числа 0, у нас есть 9 чисел, сумма которых равна

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$$

Поэтому невозможно разбить эти 9 чисел на три тройки так, чтобы сумма чисел в каждой тройке была меньше 15. Следовательно, ответ на вопросы а) и б) **НЕТ**, а вот на вопрос в) **ДА**. Например, можно расположить числа в следующем порядке:

$$0, \overbrace{9, 5, 1}, \overbrace{8, 4, 3}, \overbrace{2, 7, 6}$$

Задача 3

Существуют ли три такие различные цифры, что все трехзначные числа, составленные из них без повторений, являются простыми?

Решение: Ясно, что среди трех цифр, удовлетворяющих условию задачи, не должно быть четных цифр и цифры 5. Так как

$$371 = 7 \cdot 53,\ 391 = 17 \cdot 23,\ 791 = 7 \cdot 113,\ 793 = 13 \cdot 61,$$

то искомых наборов цифр не существует.

Задача 4

Известно, что «медные» монеты в 1, 2, 3 и 5 цента весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех «медных» монет (по одной каждого достоинства) одна - бракованная: отличается весом от нормальной. Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

Решение:

$$1 + 2 = 3? \text{ да} \Rightarrow 5 - \text{брак}$$

$$2 + 3 = 5? \text{ да} \Rightarrow 1 - \text{брак}$$

1 и 5 - не брак

Если $1 + 2 < 3$ и $2 + 3 < 5 \Rightarrow 2$ - брак(легче).

Если $1 + 2 < 3$ и $2 + 3 > 5 \Rightarrow 3$ - брак(тяжелее).

Если $1 + 2 > 3$ и $2 + 3 > 5 \Rightarrow 2$ - брак(тяжелее).

Если $1 + 2 > 3$ и $2 + 3 < 5 \Rightarrow 3$ - брак(легче).

Задача 5

При делении 1945 и 2020 на некоторое натуральное число n получились остатки соответственно 9 и 7. Чему равно n?

Решение:

$$1945 = n \cdot a + 9$$

$$2020 = n \cdot b + 7$$

$$n \cdot a = 1936$$

$$n \cdot b = 2013$$

$$n = \frac{1936}{a} = \frac{2013}{b} \to \text{ натур}$$

$$1945 = 11 \cdot 176 + 9$$

$$2020 = 11 \cdot 183 + 7$$

$$n = 11$$

Задача 6

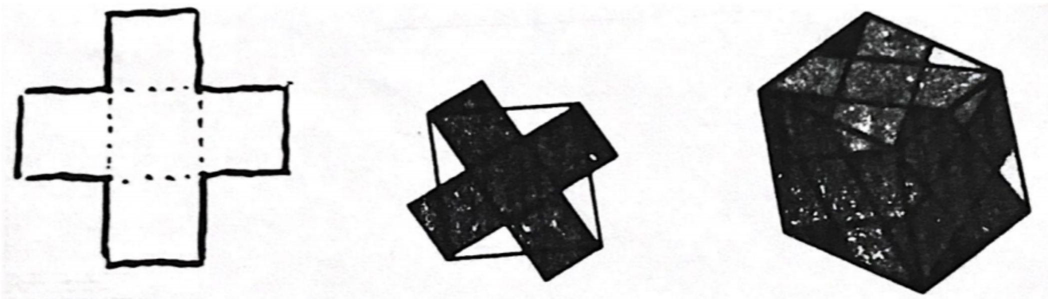
У меня дома есть три ведра, каждое из которых вмещает целое число литров. Если вылить полное первое ведро воды во второе, то вода займет там ровно $\frac{2}{3}$ его объема, а если вылить полное первое ведро в третье, то вода займет $\frac{3}{4}$ его объема. Однажды я наполнял водой тридцатилитровую бочку, сначала вылив первое ведро, потом второе, затем третье ведро, но бочка еще не наполнилась. Сколько литров воды можно было еще в нее влить?

Решение: Обозначим объемы ведер через a, b, c. Из условия задачи получаем, что $a = \frac{2b}{3}$, $a = \frac{3c}{4}$. Так как числа a, b, c - целые, то a делится на 2 и на 3, т.е. делится на 6. Если $a = 6$, то $b = 9$, $c = 8$ и $a + b + c = 23$, следовательно, в бочку можно долить $30 - 23 = 7$ литров воды. Если $a > 6$, то $a \geq 12$, $b \geq 18$, $c \geq 16$, $a + b + c \geq 46$, что противоречит условию задачи.

Задача 7

Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги. Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика. Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить поверхность кубика?

Решение:



Задача 8

Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$ его объема, а в третьем бидоне - $\frac{3}{4}$ его объема. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация?

Ответ: 18 литров.

$$\frac{1}{2}v_1 = \frac{v}{3}, \quad \frac{2}{3}v_2 = \frac{v}{3}, \quad \frac{3}{4}v_3 = \frac{v}{3}$$

$$v_1 = \frac{2}{3}v, \quad v_2 = \frac{v}{2}, \quad v_3 = \frac{4}{9}v$$

$$v_1 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$v_2 = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

$$v_3 = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$

$$v = 6 + 6 + 6 = 18.$$

Задача 9

Разложите число 1945 в сумму натуральных чисел таким образом, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

Решение: $1945 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 647$.

647 троек и 2 двойки. **Доказательство.** В искомом разложении не могут присутствовать числа > 4, потому что такое число n можно заменить числами 2, n-2, и произведение увеличится. Если в разложении присутствуют четверки, мы можем заменить каждую из них парой двоек, не изменив произведения. Единиц тоже быть не может: мы приплюсуем единицу к любому другому числу, и произведение увеличится. Значит, в одном из искомых наборов стоят только тройки и двойки. Если есть 3 двойки, мы заменим их двумя тройками, и произведение опять увеличится. Итак, наш набор содержит не более двух двоек, остальные числа набора – тройки.

Задача 10

На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

Решение: Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4^3 или 64 (4 возможности за каждую из трех контрольных). Поскольку число учащихся больше 64. по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.