

Задача 1

Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите это число.

Решение:

$$10x + y = 4(x + y) + 3$$

$$9x = 3(x + y) + 3$$

$$3x = x + y + 1$$

$$2x = y + 1$$

y=1	x=1
y=3	x=2
y=5	x=3
y=7	x=4
y=9	x=5

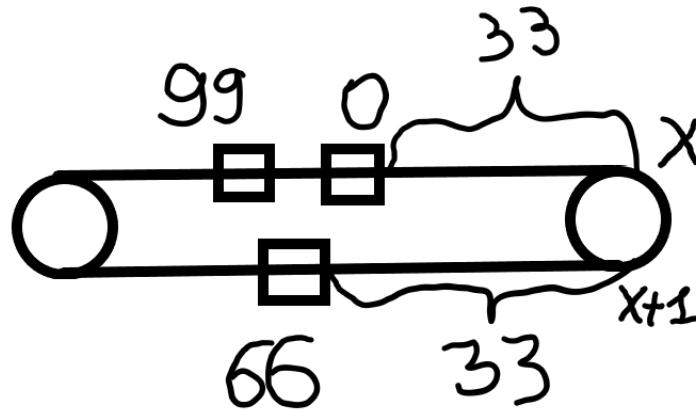
11	23	35	47	59
2	5	8	11	14
5	4	4	4	4
1	3	3	3	3

Ответ: 23, 35, 47, 59

Задача 2

Однажды я решил проехаться по кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее - номер 0, дальше 1, 2 и т.д. Я взглянул на номер своего кресла. Он оказался равным 66. Проехал ли я половину пути? При встрече с каким креслом я проеду половину пути?

Решение: Очевидно, что я окажусь посередине канатной дороги в тот момент, когда количество кресел впереди и сзади окажется одинаковым. Поскольку всего кресел 96, искомый номер встречного кресла равен $66 - 48 = 18$. (Если бы номер моего кресла был меньше 48, то номер встречного кресла был бы на 48 больше, а не меньше, чем номер моего кресла.)



$$65 - x - 1 + 1 = \underbrace{65 - x}_{\text{количество до конца}} = \underbrace{x + 1}_{\text{количество от начала}}$$

$$x = 33$$

$$96 - 68 = 28$$

Значит от начала пути 18 номеров, а до конца ещё 33 \Rightarrow не прошёл половину пути.

Задача 3

Разложите число 2020 в сумму натуральных чисел таким образом, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

Решение: $2020 = 2 \cdot 2 + 2016 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 672$ **Доказательство.** В искомом разложении не могут присутствовать числа > 4 , потому что такое число n можно заменить числами 2, $n-2$, и произведение увеличится. Если в разложении присутствуют четверки, мы можем заменить каждую из них парой двоек, не изменив произведения. Единиц тоже быть не может: мы приплюсуем единицу к любому другому числу, и произведение увеличится. Значит, в одном из искомых наборов стоят только тройки и двойки. Если есть 3 двойки, мы заменим их двумя тройками, и произведение опять увеличится. Итак, наш набор содержит не более двух двоек, остальные числа набора – тройки.

Задача 5

Урожай фруктов в этом году был отличный. Мы наварили не менее 19 банок варенья. Я расставил их на трех полках в погребе так, чтобы на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку я поставил одну большую и четыре средние банки, на вторую - две большие и шесть литровых банок, а на третью - одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья мы сварили?

Решение: Из сравнения первой и третьей полок следует, что объем средней банки равен 3 литрам. Сравнив вторую и третью полки, замечаем, что на третьей полке стоит половина того, что стоит на второй полке, и еще три средних банки. Таким образом, половина объема варенья на полке уместается в трех средних банках, что составляет 9 литров. Значит, на одной полке стоит 18 литров, а на всех трех полках 54 литра варенья.

I:	$x+4y$
II:	$2x+6$
III:	$x+3y+3$

$$x + 4y = x + 3y + 3$$

$$y = 3 - \text{объем средней банки}$$

$$2(2x + 6) = x + 4y + x + 3y + 3$$

$$4x + 12 = 2x + 21 + 3$$

$$2x = 12$$

$$x = 6 \Rightarrow \text{всего литров } 3 \cdot (6 + 4 \cdot 3) = 54$$

Задача 6

Я и мой друг приобрели за 3 дня 18 марок. Сегодня я купил столько марок, сколько мой друг вчера и сегодня, но зато позавчера он купил на 2 марки больше, чем я вчера и позавчера. Сколько же марок приобрел каждый из нас?

Решение:

$$a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 = 18$$

$$c_1 = b_2 + c_2$$

$$b_1 + a_1 = a_2 - 2$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 - 2$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + a_1 + b_1 + 2 + c_1 = 18$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) = 16$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 8$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 10$$

Ответ: Я: 8, Друг: 10

Задача 7

Сумма цифр 20-значного числа N равна 10, сумма цифр числа $7N$ равна 70, сумма цифр числа $19N$ равна 19. Найдите N .

Решение:

$$N = \overbrace{11\dots1}^{10} \overbrace{00\dots0}^{10}$$

$$19N = 20N - N = \overbrace{22\dots222}^{10} \overbrace{00\dots0}^{11}$$

$$\overbrace{1\dots111}^{10} \overbrace{10\dots0}^{10}$$

$$2 \overbrace{1\dots11}^8 09 \overbrace{00\dots0}^{10}$$

$$S(19N) = 19$$

Задача 8

В Великобритании и США температуру принято измерять по шкале Фаренгейта, по которой температура плавления льда составляет 32 градуса, а температура кипения воды 212 градусов. Существует ли температура, при которой количество градусов по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта будет совпадать?

Решение: Так как обе шкалы равномерные, мы можем написать связь между температурами по Фаренгейту - и по Цельсию - t в виде $F = at + b$. Подставив $t = 0$ получаем, что $b = 32$, а при $t = 100$ получаем $212 = 100a + 32$, откуда $a = 1.8$. Теперь из уравнения $F = 1.8t + 32$, получаем, что -40 градусов Цельсия температура по Фаренгейту также будет равна -40.

Задача 9

Шофёр автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами от 537000 до 537999, а в другой - с номерами от 462000 до 462999. В какой из катушек "счастливых" билетов больше (т.е.е таких, что сумма первых трёх цифр равна сумме следующих трёх цифр)?

Решение: Если заменить каждую цифру "счастливого" билета на ее дополнением до 9, т.е. 0 на 9, 1 на 8 и т.д., то полученный билет тоже будет "счастливым причём если билет был из первой катушки, то полученный билет будет из второй катушки. Отсюда следует, что в каждой катушке одно и то же количество "счастливых" билетов.

Задача 10

Дедушка с тремя внуками вышел прогуляться в парк. Встретившийся им дедушкин знакомый спросил, сколько каждому из них лет. Ваня сказал: "Я младше Пети и мне больше пяти лет". Петя произнес: "Я младше Саши на 3 года". А Саша сказал: "Нам всем вместе в 3 раза меньше лет, чем дедушке, а вместе с дедушкой нам ровно 100 лет". Сколько лет каждому из внуков?

Решение: Из слов Саши следует, что дедушке 75 лет, а внукам вместе 25 лет. Если обозначить возраст Вани через x , возраст Пети через y , а возраст Саши через z , то из высказывания Пети следует, что

$$x + 2y = x + y + y = x + y + (z - 3) = 25 - 3 = 22$$

что при x , меньшем y , но большем 5, возможно лишь тогда, когда $x = 6$, $y = 8$. Итак возраст Вани - 6 лет, Пети - 8 лет и Саши - 11 лет.