Европа 11.1

$$x^2 + y^2 = 19451945$$

$$1945 = 1936 + 9 = 44^2 + 3^2 = 44 + 3$$

$$10001 = 100^2 + 1 = 100^2 + 1 = 100 + i$$

$$(44 + 3i)(100 + i) = (4400 - 3) + (300 + 44)$$

Ответ: $(4397; 344)$
Решение 2:

$$19451945 = 1945 \cdot 10001 = 5 \cdot 389 \cdot 73 \cdot 137$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2)}_{1945}\underbrace{(u^2 + v^2)}_{10001} = (au + bv)^2 + (av - bu)^2$$

$$1945 = \underbrace{44^2}_{a} + \underbrace{3^2}_{b}$$

$$10001 = \underbrace{100^2}_{u} + \underbrace{1^2}_{v}$$

$$au + bv = 4400 + 3 = 4403$$

$$av - bu = 44 - 300 = -256$$

Ответ: $(256; 4403)$ $(4403; 256)$
Решение 3:

$$4400^2 = 19360000$$

$$4410^2 = 19448100$$

$$4411^2 = 19456921$$

$$4420^2 = 19536400$$

$$1^2 \equiv 1$$

$$2^2 \equiv 4$$

$$3^2 \equiv 9$$

$$4^2 \equiv 6$$

$$5^2 \equiv 5$$

$$6^2 \equiv 6$$

$$7^2 \equiv 9$$

$$8^2 \equiv 4$$

$$9^2 \equiv 1$$

$4410^2 = 19448100 : 3$	$3845 \neq n^2$
$4409^2 = 19439281$	$12664 \neq n^2$
$4408^2 = 19430464$	$21481 \neq n^2$
$4407^2 = 19421649 : 3$	$30296 \neq n^2$
$4406^2 = 19412836$	$39109 \neq n^2$
$4405^2 = 19404025$	$47920 \neq n^2$
$4404^2 = 19395216 : 3$	$56729 \neq n^2$
$4403^2 = 19386409$	$65536 = 256^2$

$$112^2 = 12544$$

$$118^2 = 13924$$

$$141^2 = 19881$$

$$149^2 = 22201$$

$$174^2 = 30276$$

$$176^2 = 30976$$

$$193^2 = 37249$$

$$197^2 = 38809$$

$$233^2 = 54289$$

$$237^2 = 56169$$

Замечание:

$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$73 = 4 \cdot 18 + 1$$

$$137 = 4 \cdot 34 + 1$$

$$389 = 4 \cdot 97 + 1$$

Все решения:

$(3149; 3088)$
$(3088; 3149)$
$(4397; 344)$
$(344; 4397)$
$(4403; 256)$
$(256; 4403)$
$(3676; 2437)$
$(2437; 3676)$
$(4372; 581)$
$(581; 4372)$
$(3724; 2363)$
$(2363; 3724)$
$(2632; 3539)$
$(3539; 2632)$
$(4229; 1252)$
$(1252; 4229)$

Европа 11.2

$$3(x^3+y^3+x^2(y+z)-xyz) = -2(y^2+z^3+y^2(z+x)-xyz) = 6(z^3+x^3+z^2(x+y)-xyz)$$

Решение:

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2(y+z)-xyz = 2a \\ y^3+z^3+y^2(z+x)-xyz = 3a \\ z^3+x^3+z^2(x+y)-xyz = a \end{cases}$$

$$2x^3+2y^3+2z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) = 3xyz$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+x^3+y^3+z^3 = 3xyz$$

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = xy+yz+zx \\ w = xyz \end{cases}$$

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3xy^2+3xz^2+6xyz+3x^2y+3x^2z+3y^2z+3y^2x$$

$$u^3 = x^3+z^3+6w+3y^2(u-y)+3z^2(u-z)+3x^2(u-x)$$

$$u^3 = x^3+y^3+z^3+6w+3u(x^2+y^2+z^2-3y^3-3x^3-3z^3 =$$

$$= -2(x^3+y^3+z^3)+6w+3y(x^2+y^2+z^2) = -2(x^3+y^3+z^3)+6w+3u(y^2-2v)$$

$$x^2+y^2+z^2 = u^2-2v$$

$$2u^3-5uv = 0$$

$$u = 0,\ u(2u^2-5v) = 0$$

$$u = 0$$

$$2u^2-5v = 0$$

$$z = -x-y$$

$$2x^2-x(y+z)+2y^2-yz+2z^2 = 0$$

$$D < 0$$

$$\begin{cases} y^3+xy(x+y) = 2a \\ x^3+xy(x+y) = a \\ z = -(x+y) \end{cases}$$

$$\frac{y^3+xy(x+y)}{x^3+xy(x+y)} = 2$$

$$y = tx \, t = 2$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = -3x \end{cases}$$

Ответ: $(x, 2x, -3x)$, x - любое действительное число

Европа 11.3

1) На координатной плоскости задана последовательность точек

$$A_n(a_n, b_n),\ \forall n > 2,\ A_1(19;45), A_2(20;20)$$

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2},\ b_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

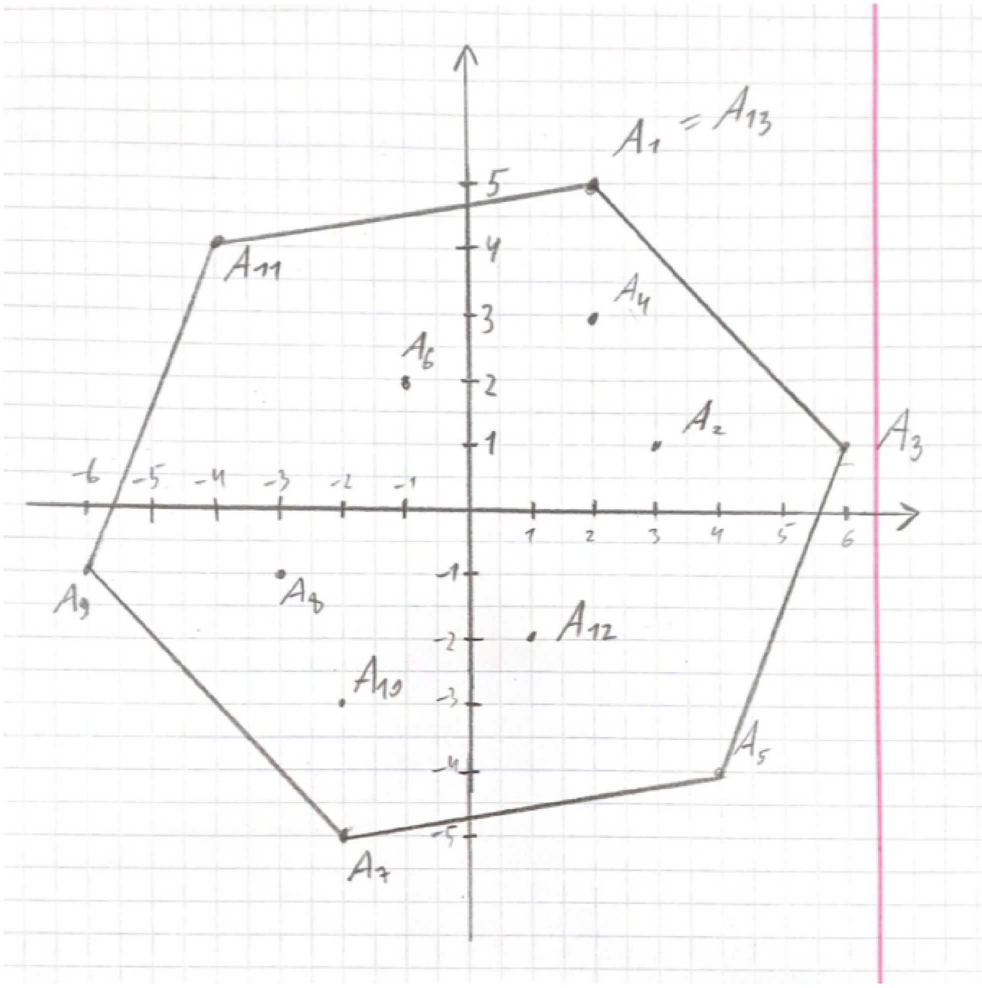
Найдите площадь $A_{2020}A_{1945}A_{75}$

Решение:

$$\begin{cases} A_1(a_1;b_1) \\ A_2(a_2;b_2) \\ A_3(b_2+b_1;a_2-a_1) \\ A_4(b_2+a_2-a_1;b_2+b_1-a_2) \\ A_5(b_2+b_1-a_1;a_2-a_1-b_1) \\ A_6(b_2-a_1;b_1-a_2) \\ A_7(-a_1;-b_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{13}(a_1;b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{75} = A_3(65;1) \\ A_{1945} = A_1(19;45) \\ A_{2020} = A_4(21;45) \end{cases}$$

$$S = 44$$



$A_1 = A_{13}$
A_{11}
A_4
A_6
A_2
A_3
A_9
A_8
A_{12}
A_{10}
A_5
A_7

Европа 11.4

Верно ли равенство $\sin 3 \cdot \sqrt[3]{\cos 2} - sin2\sqrt[3]{\cos 3} < \sqrt[3]{cos2cos3}$?.

Решение:

Так как $\cos 2 \cdot \cos 3 > 0$, то, разделив обе части данного неравенства на его правую часть, мы можем переписать его в виде

$$\frac{\sin 3}{\sqrt[3]{\cos 3}} - 3 < \frac{\sin 2}{\sqrt[3]{\cos 2}} - 2,$$

или $f(3) < f(2)$, где

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{cosx}} - x \quad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]\right).$$

Для удобства дифференцирования этой функции положим:

$$t = x - \frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = -\frac{\cos t}{\sqrt[3]{\sin t}} - t - \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\cos t(\sin t)^{-\frac{1}{3}} - t - \frac{\pi}{2} \quad \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

тогда

$$f'(t) = \sin \frac{2}{3} t + \frac{1}{3} sin^{-\frac{4}{3}} t \cos t - 1 =$$

$$= \frac{2}{3} \sin^{\frac{2}{3}} t + \frac{1}{3} \sin^{-\frac{4}{3}} t - 1 \quad \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$f''(t) = \frac{4}{9} sin^{-\frac{1}{3}} t \cos t - \frac{4}{9} \sin^{-\frac{7}{3}} t \cos t =$$

$$= \frac{4}{9} \cos t \sin^{-\frac{7}{3}} t(sin^2 t - 1) < 0 \quad \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Следовательно, $f'(t)$ - убывающая функция и на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(t) > f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, т.е. $f(x + \frac{\pi}{2})$ возрастает $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а $f(x)$ возрастает на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

В частности, $f(3) > f(2)$, т.е. исходное неравенство неверно.

Европа 11.5

Пусть задан многочлен $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что существуют шесть различных целых чисел β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 такие, что $P(\beta_1) = P(\beta_2) = P(\beta_3) = P(\beta_4) = P(\beta_5) = P(\beta_6) = 1946$. Найдите такие целые k, что $P(k) = 2020$.

Решение:

$$1945 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x) = 2020$$

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)g(k) = 75 = 5^2 \cdot 3$$

$$(k-\alpha_1)(k-\alpha_2)(k-\alpha_2)(k-\alpha_4)(k-\alpha_5)(k-\alpha_6)g(k) = 5^2 \cdot 3$$

Все $(k-\alpha_i)$ – различные целые числа. $g(k)$ - любые, но их произведение равно 75. Разложим на максимальное количество множителей 75, чтобы все кроме одного не повторялись

$$75 = \underbrace{5 \cdot (-5) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1}_{\text{5 различных}} \cdot \underbrace{1}_{\text{g(k)}}$$

Невозможно найти такие k, т.к будут повторения среди α_i.

Европа 11.6

В конус вписаны две касающиеся между собой сферы a и b.(Каждая сфера касается поверхности конуса по окружности.) Существует n равных сфер, касающихся a, b, поверхности конуса и таких, что каждая из них касается еще двух из этих n сфер. Какие значения может принимать число n?

Решение: Пусть O_1, O_2 и O - центры сфер α, β и одной из n равных сфер. AB - отрезок образующий конуса, которой касаются эти три сферы. Пусть радиус сферы α равен 1, радиус сферы β равен x, а радиус каждой из n равных сфер равен y, расстояние от O до оси конуса O_1O_2 равно z. Выразим сначала y через x. Для этого проведем через O_1 и O прямые, параллельные AB, обозначим получившиеся точки пересечения K, M, P.

Нетрудно найти

$$O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = \sqrt{(1+x)^2 - (x-1)^2} = 2\sqrt{x}, OK = 2\sqrt{y}, OM = 2\sqrt{xy}$$

.

Из уравнения

$$O_1P = OK + OM$$

или

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

найдём $\sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Для определения z выразим площадь треугольника двумя способами(один раз по формуле Герона):

$$\frac{1}{2}(1+x)z = \sqrt{(x+y+1)xy}, \quad z = \frac{2\sqrt{(x+y+1)xy}}{1+x}$$

Таким образом, с учётом найденного значения y будем иметь

$$sin\frac{\pi}{n} = \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{y}(1+x)}{2\sqrt{(x+y+1)x}} = \frac{1+x}{2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2(1+\frac{\sqrt{x}}{1+x})}$$

Так как при $x > 1$

$$0 < \frac{\sqrt{x}}{1+x} < \frac{1}{2}, \text{то } \frac{1}{3} < \frac{y}{z} < \frac{1}{2}$$

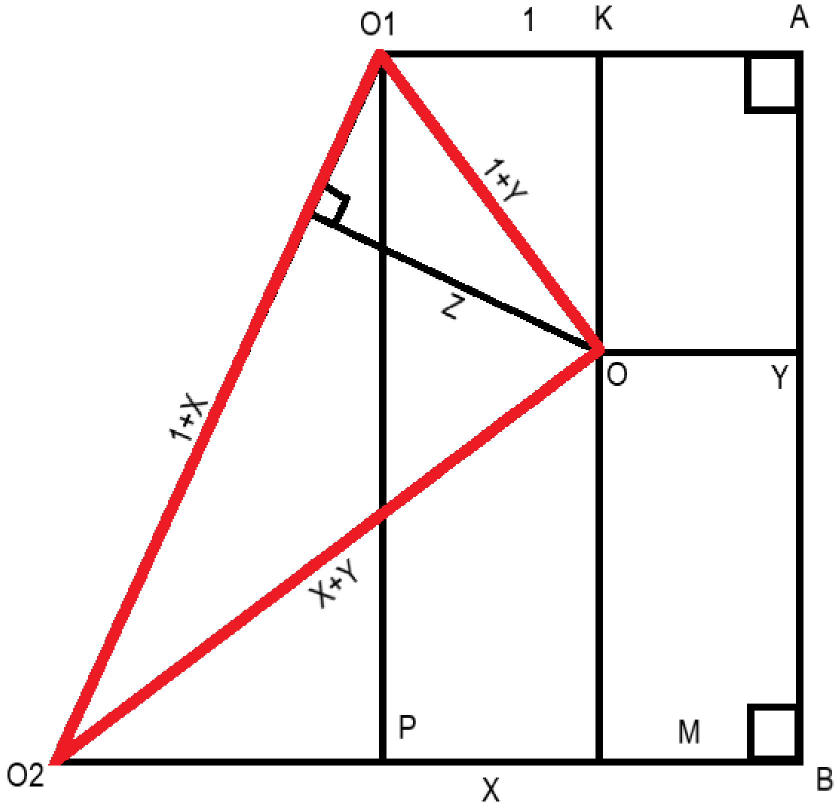
Поскольку

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{3},$$

$$sinx > x - \frac{x^3}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{9} > \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{729} > \frac{1}{3}.$$

то n может принимать значения 7,8,9.


O1
1
K
A
1+Y
Z
1+X
O
Y
X+Y
P
M
O2
X
B

Европа 11.7

Через вершину правильного тетраэдра с ребром a проведена плоскость так, что линия её пересечения с плоскостью основания параллельная стороне и делит основание на две равновеликие части. С помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий площади сечения тетраэдра указанной плоскости.

Решение:

$$AF = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$DH = H$$

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2$$

$$AO = x$$

Из подобия треугольников и $S_{ABC} = 2S_{AMN} \longrightarrow (\frac{x}{n})^2 = \frac{1}{2}; x = \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$$DO = l$$

$$l^2 = \frac{2}{3}a^2 + \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}n\right)^2 =$$

$$= a^2\left(\frac{2}{3} + \frac{17 - 12\sqrt{2}}{24}\right) =$$

$$= a^2\frac{11 - 4\sqrt{2}}{8}$$

$$S = \frac{1}{2}l \cdot MN$$

MN из подобия $\longrightarrow$ MN $= \frac{a}{2} \longrightarrow S = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{\frac{11-4\sqrt{2}}{8}}$

$$S = \frac{a^2}{8}\sqrt{11 - 4\sqrt{2}}$$

$$X = \frac{a\sqrt[4]{11 - 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{4}\sqrt[4]{44 - 16\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a}{4}\left(\sqrt{\sqrt{44} - 4\sqrt[4]{2}}\sqrt{\sqrt{44} + 4\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{a^2\sqrt{44} - 4a^2\sqrt[4]{2}}\sqrt{a^2\sqrt{44} + 4a^2\sqrt[4]{2}}}$$

$$x^2 = 2a \cdot a\sqrt{11}$$

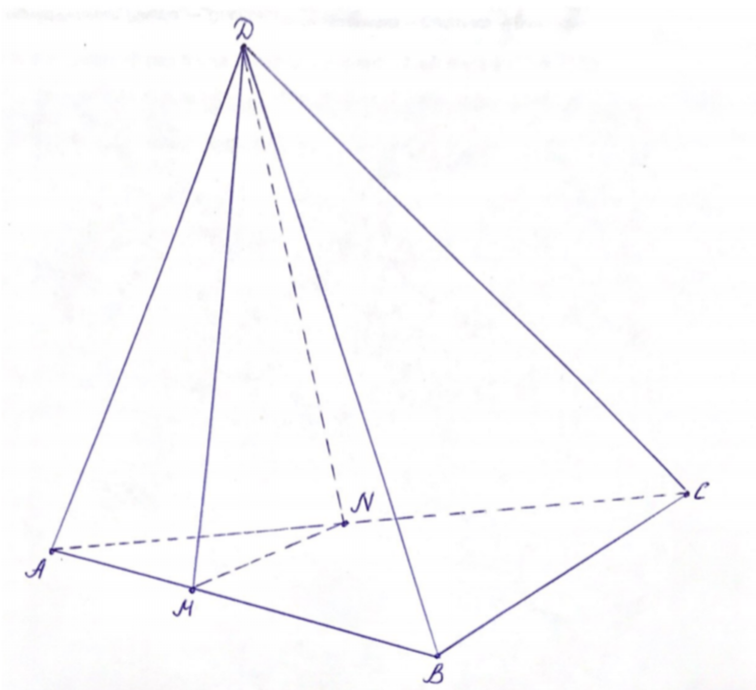
$$a\sqrt{11} = \sqrt{(3a)^2 + (\sqrt{2}a)^2}$$

$$x = \sqrt{2a \cdot a\sqrt{11}}$$

$$y = 2\sqrt{a \cdot z}$$

$$y^2 = 4a\sqrt[4]{2a^4} = 4a \underbrace{\sqrt{a \cdot (\sqrt{2}a)}}_{\text{среднегеометрическое}} = 4a \cdot z$$

Решение 2:

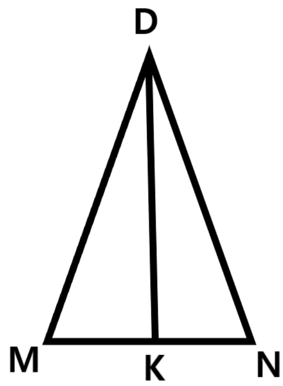


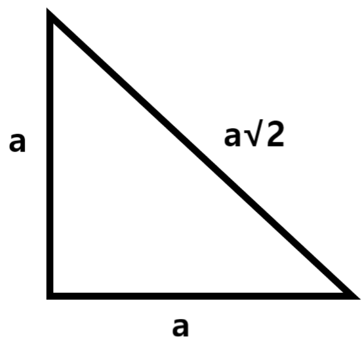
$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|AM| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$DM = DN$$

$$MN = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$





1. Строим основание ΔABC
2. Строим отрезок $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
3. Строим грань ADB и находим отрезок DM
4. Строим сечение ΔMDN $MN = AM = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, DN
5. Находим отрезок DK (MK = KN)
6. Сечение квадрата равно $\sqrt{MK \cdot KD}$ - среднегеометрическое
7. Строим квадрат

Элементарные построения с помощью циркуля и линейки достаточно для решения данной задачи.

1. Построение треугольника по трем сторонам
2. Из точки на прямой восстановить перпендикуляр к этой прямой
3. Деление отрезка пополам

Европа 11.8

а)Можно ли занумеровать ребра куба числами $1, 2, \ldots, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трёх выходящих из неё ребер была одной и той же

Решение: Предположим, что можно расставить числа $1, 2, \ldots, 12$ на ребрах куба так, что сумма трех чисел при каждой вершине равна s. Сложим все восемь таких сумм, соответствующих разным вершинам куба. В полученную сумму 24 чисел каждое из чисел $1, 2, \ldots, 12$ войдет два раза, потому что каждое ребро куба примыкает к двум вершинам. Таким образом,

$$2(1 + 2 + \cdots + 12) = 8s$$

откуда $s = \frac{12 \cdot 13}{8} = \frac{39}{2}$; s получается не целым! Возникшее противоречие показывает, что нужным образом занумеровать рёбра числами $1, 2, \ldots, 12$ нельзя!

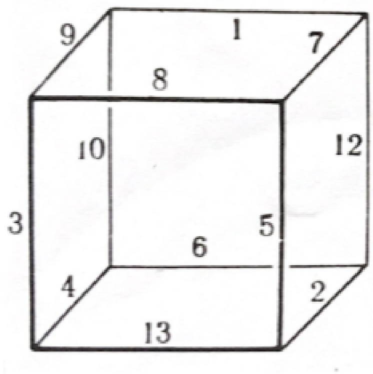
б) Можно ли вычеркнуть одно из чисел $1, 2, \ldots, 12, 13$ и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

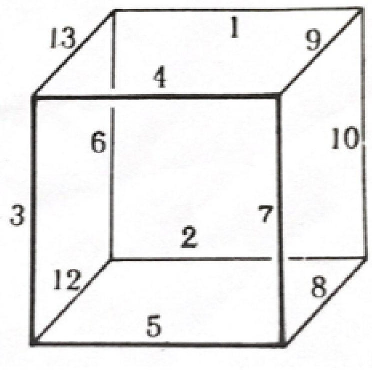
Решение: Можно. Из решения пункта а) видно, что вычеркивать имеет смысл только такое число c, для которого

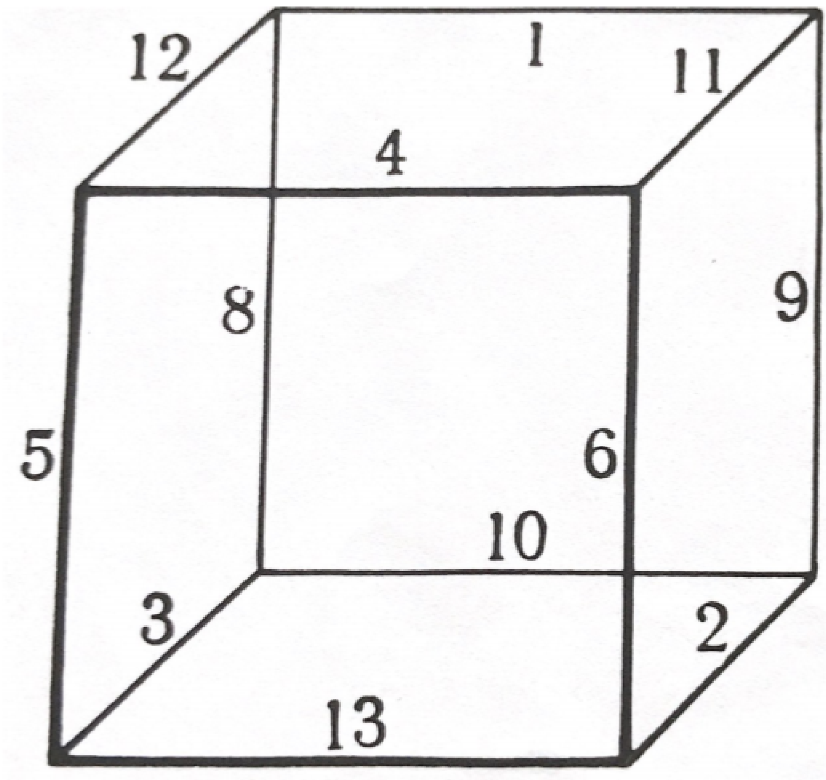
$$s = \frac{1 + 2 + \cdots + 13 - c}{4} = \frac{91 - c}{4}$$

- целое, то есть $c = 3, c = 7$ или $c = 11$. При этом соответственно $s = 22, s = 21$ или $s = 20$.

Ответ: Расстановка цифр $1, \ldots, 6, 8, \ldots, 13$ показанная на рисунке 5 единственная. Существуют ровно две различные расстановки цифр $1, \ldots, 10, 12, 13$ и ровно две расстановки цифр $1, 2, 4, \ldots, 13$; они получаются из расстановок заменой каждой цифры k на симметричную $k \to 14 - k$


9
1
7
8
10
12
3
5
6
4
2
13


13
1
9
4
6
10
3
7
2
12
8
5


12
1
11
4
8
9
5
6
10
3
2
13

Европа 11.9

Известно, что углы A, B, C треугольника ABC удовлетворяют соотношению

$$3sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}+sin\frac{3A}{2}sin\frac{3B}{2}cos\frac{3C}{2}=0.$$

Приведите хотя бы один пример такого треугольника, длины сторон которого: а) рациональны; б) действительны.

Решение:

$$S\frac{1}{2}\cdot sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(cos\frac{A-B}{2}-cos\frac{A+B}{2})=\frac{1}{2}(cos\frac{A-B}{2}-sin\frac{C}{2})$$

и

$$sin\frac{1}{2}\cdot sin\frac{3B}{2}=\frac{1}{2}\left[cos\frac{3}{2}(A-B)-cos\frac{3}{2}(A+B)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[cos\frac{3}{2}(A-B)+sin\frac{3}{2}C\right]$$

Будем теперь преобразовывать левую часть данного в условии задачи равенства:

$$3sin\frac{A}{2}\cdot sin\frac{B}{2}\cdot cos\frac{C}{2}+sin\frac{3A}{2}\cdot sin\frac{3B}{2}\cdot cos\frac{3C}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}cos\frac{A-B}{2}cos\frac{C}{2}-\frac{3}{2}sin\frac{C}{2}\cdot cos\frac{C}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}cos\frac{3}{2}(A-B)cos\frac{3C}{2}+\frac{1}{2}sin\frac{3}{2}C\cdot cos\frac{3}{2}C=$$

$$\frac{3}{2}cos\frac{A-B}{2}\cdot sin\frac{A+B}{2}\cdot\frac{3}{4}sinC-\frac{1}{2}cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot sin\frac{3}{2}(A+B)+$$

$$+\frac{1}{4}sin3C=\frac{3}{4}(sinA+sinB)\cdot\frac{3}{4}sinC-\frac{1}{4}(sin3A+sin3B)+\frac{1}{4}sin3C.$$

Итак, углы треугольника ABC связаны зависимостью

$$3sinA+3sinB-3sinC-sin3A-sin3B+sin3C=0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$2(sinA+sinB-sinC)+(sinA-sin3A)+(sinB-sin3B)-(sinC-sin3C).$$

Далее:

$$2(sinA + sinB - sinC) - 2cos2A \cdot sinA-$$

$$-2cos2B \cdot sinB + 2cos2C \cdot sinC = 0.$$

и

$$sinA(1 - cos2A) + sinB(1 - cos2B) = sinC(1 - cos2C)$$

Это даёт нам:

$$sin^3A + sin^3B - sin^3C$$

Так как

$$a : \; sinA = b : \; sinB = c : \; sinC = 2R,$$

то искомое соотношение между сторонами треугольника имеет вид:

$$a^3 + b^3 - c^3$$

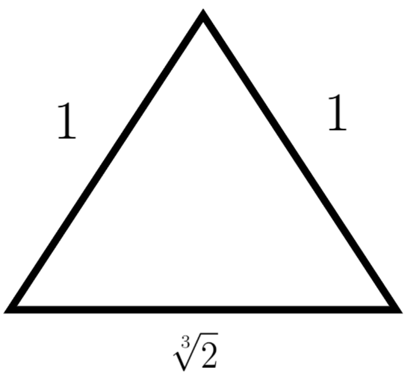
$$a = \frac{m}{m}, \quad b = \frac{p}{q}, \quad c = \frac{r}{s}$$

$$m, n, p, q, r, s \in N$$

$$a^3 + b^3 - c^3$$

$$(mqs)^3 + (pns)^3 = (rnq)^3$$

Ответ:
а) $\varnothing$
б) да



$$2 = 1 + 1 > \sqrt[3]{2}$$

Европа 11.10

Пусть A – множество, состоящее из 10 элементов. X и Y - подмножества множества A, такие что

$$X \cup Y = A.$$

Из всех решений этого уравнения (X,Y) наудачу выбирают одно. Какова вероятность того, что X и Y содержат ровно по 7 элементов?

Решение:

$$X \cup Y = A$$

$$P = \frac{C_{10}^7 \cdot C_7^4}{3^{10}}$$