Европа 10.1

Найдите пару положительных десятичных дробей x и y, удовлетворяющих равенству:

$$x^2 + y^2 = \frac{1945}{2020}$$

Решение: (Используя целые Гауссовые числа)

$$4 \cdot 101(x^2 + y^1) = 389$$

$$\underbrace{(2 \cdot 101x)^2}_{\alpha} + \underbrace{(2 \cdot 101y)^2}_{\beta} = 389 \cdot 101$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (289 + 100)(100 + 1)$$

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = (17 + 10i)(17 - 10i)(10 + i)(10 - i)$$

$$\alpha + i\beta = (17 + 10i)(10 + i) = 160 + 117i$$

$$\alpha = 160 \quad \beta = 117 \quad (160^2 + 117^2) = 39289 = 101 \cdot 389)$$

$$x = \frac{160}{202} = 0.(7920) \quad y = \frac{117}{202} = 0.5(7920)$$

$$\alpha + i\beta = (17 + 10i)(10 - i) = 180 + i83$$

$$\alpha = 180 \quad \beta = 83 \quad (180^2 + 83^2 = 39289 = 101 \cdot 389)$$

$$x = \frac{180}{202} = 0.(8910) y = \frac{83}{202} = 0.4(1089)$$

Всего четыре решения: $0.4(1089); 0.(8910); 0.5(7920); 0.(7920)$

Решение 2: (Можно найти решения, используя тождество)

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2$$

a)

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 10 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (180)^2 + (83)^2$$

$$\begin{cases} \alpha = 180 \\ \beta = 83 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0.(8910) \\ y = 0.4(1089) \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 10 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (117)^2 + (160)^2$$

$$\begin{cases} \alpha = 117 \\ \beta = 160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0.5(7920) \\ y = 0.(7920) \end{cases}$$

Решение 3: (Решение задачи возможно найти подбором)

$$\begin{cases} \alpha = 140 + a \\ \beta = 140 - b \end{cases}$$

$$2 \cdot 140^2 = 39200, \ a, b > 0$$

$$a^2 + b^2 + 280(a - b) = 89, \ a, b \in N, a < b$$

$$a - b = -1 \quad 2b^2 - 2b + 1 - 280 - 89 = 0$$

$$a = b - 1 \quad b^2 - b - 184 = 0 \quad D = 137 \neq n^2 \quad b \notin N$$

$$a - b = -2 \quad 2b^2 - 4b + 4 - 560 - 89 = 0$$

$$a = b - 2 \quad 2b^2 - 4b - 645 = 0 \quad b \notin N$$

$$a - b = -3 \quad 2b^2 - 6b + 9 - 840 - 89 = 0$$

$$b^2 - 3b - 460 = 0 \quad D = 9 + 4 \cdot 460 = 43^2$$

$$b = \frac{3 \pm 43}{2}$$

$$\begin{cases} b_1 = 23 \\ a_1 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -20 \\ a_1 = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 160 \\ \beta = 117 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 117 \\ \beta = 160 \end{cases}$$

Европа 10.2

Найти все натуральные числа, которые увеличиваются в 2 раза от перестановки его последней цифры на первое место.

Решение: Пусть n-значное число N удовлетворяет условию задачи, a - его последняя цифра, m - число образованное остальными цифрами числами N; по условию $2(10m+a) = 10^{n-1}a + m$ или

$$19m = (10^{n-1} - 2)a$$

Подсчет остатков от деления 10^k на 19 при $0 \leq k < 18$ показывается, что $10^k - 2$ делится на 19 только при $k = 17$. Вычисленные остатки показывают также, что лишь 10^{18} при делении на 19 даёт остаток 1; если теперь 10^{n-1-2} делится на 19 и $n - 1 = 18q + r$, где $0 \leq r < 18$, то

$$10^{n-1} - 2 = (10^{18})^q \cdot 10^r - 2 = (19s+1) \cdot 10^r - 2 =$$

$$= (19s) \cdot 10^r + 10^r - 2$$

так что $10^r - 2$ делится на 19, откуда $r = 17$, $n = 18q + 18$.

В результате получаем

$$N = 10 \cdot \frac{10^{n-1} - 2}{19} a + a = \frac{10^n - 1}{19} a$$

.

Например, наименьшее число $\frac{10^{18}-1}{19} \cdot 2 =$

$$= 105263157894736842$$

$$105263157894736842 \cdot 2 = 210526315789473684$$

Европа 10.3

2. Сколько различных решений имеет неравенство $1950 \leq [a] \leq 2020$? Если $[a]$ - наибольшее целое число не превосходящее

$$a = \sqrt[3]{m^3 - m + \sqrt[3]{m^3 - m + \dots + \sqrt[3]{m^3 - m}}} +$$

$$+ \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \dots + \sqrt{n^2 - n}}}$$

Решение: Считаем m, n - натуральными. Заметим, что если в первом и втором слагаемых отбросим последние вычитаемые m, n, то эти слагаемые станут равными соответственно m, n, поэтому данное число a меньше чем $m + n$

С другой стороны, первое слагаемое больше чем $\sqrt[3]{m^3 - m}$, что, в свою очередь, больше чем $m - \frac{1}{3}$; в самом деле,

$$\sqrt[3]{m^3 - m} > m - \frac{1}{3} \Longleftrightarrow m^3 - m > m^3 - m^2 +$$

$$+ \frac{m}{3} - \frac{1}{27} \Longleftrightarrow 27m^3 - 36m + 1 > 0,$$

как легко видеть,

$$m \geq 2 \to 27m^2 - 36m + 1 > 0,$$

Аналогично получаем, что второе слагаемое больше $\sqrt{n^2 - n} > n - \frac{2}{3}$. Следовательно $a > m + n - 1$, так что $[a] = m + n - 1$

Ответ: 150594

$$m + n = k, k - 1, 2019 - 1944 + 1 = 76$$

$$(s, k - s) \quad s = 1, k - 1$$

$$1944 + \dots + 2019 = \frac{2019 + 1944}{2} \cdot 76 = 3963 \cdot 38$$

Европа 10.4

Дан многочлен $f(x) = x^{1945} + a_1 x^{1944} + \cdots + a_{1945}$. Игроки поочередно заменяют один из коэффициентов a_i (каждый коэффициент a_i используется только один раз) произвольным вещественным числом. Первый игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело как можно меньше различных вещественных корней, второй игрок стремится к тому, чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело как можно больше различных вещественных корней. На что может рассчитывать каждый из игроков?

Решение: Так как f многочлен нечетной степени, то уравнение $f(x) = 0$ всегда имеет хотя бы один вещественный корень. Покажем, что существует поведение первого игрока гарантирующее ему не более одного корня уравнения $f(x) = 0$. Своим первым ходом первый игрок выбирает a_{1945}. Так как общее число ходов в данной игре равно 1945, то последний ход делает первый игрок. Пусть a_k – коэффициент, оставшийся первому игроку перед его последним ходом. Возможны два случая: а) k-четное б) k-нечетное

Уравнение $f(x) = 0$ эквивалентно уравнению

$$h(x) = x^k + \cdots + \frac{a_{1945}}{x^{1945-k}} = -a_k$$

Тогда имеем а)

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to-0} h(x) = -\infty, \ \lim_{x\to+0} h(x) = \infty;$$

б)

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty \ \lim_{x\to-0} h(x) = \lim_{x\to+0} h(x) = \infty$$

Выбирая $a_k > 0$ и достаточно большим, первый игрок добьется того, что уравнение $h(x) = -a_k$, а следовательно, уравнение $f(x) = 0$ будет иметь один корень.

Ответ: при правильной стратегии первый игрок всегда выйгрывает

Европа 10.5

Доказать, что если числа a, b, c положительны, то хотя бы одно из чисел $(a+b+c)^2 - 8ac$, $(a+b+c)^2 - 8bc$, $(a+b+c)^2 - 8ab$ положительно.

Решение: Сумма данных чисел равна $3(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$ и следовательно положительны, так как положительны a, b, c. Поэтому хотя бы одно из слагаемых положительно, что и требовалось доказать.

Европа 10.6
Сколько решений имеет уравнение?

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+\{x\}=\frac{7x-2}{3}$$

Решение: Пусть $x=k+a$, где $k\in Z$, $0\leq a<1$; тогда уравнение примет вид:

$$\left[k+a+\frac{3}{8}\right]+a=\frac{7(k+a)-2}{3}$$

$$\left[a+\frac{3}{8}\right]=\frac{4(k+a)-2}{3}$$

Случай 1: $0\leq a<\frac{5}{8}$

$$\left[a+\frac{3}{8}\right]=0$$

$$k+a=\frac{1}{2}$$

$$0\leq a=\frac{1}{2}-k<\frac{5}{8}\to-\frac{1}{4}<k\leq\frac{1}{2},\ k=0$$

$$x=0+\frac{1}{2}=0,5$$

Случай 2: $\frac{5}{8}\leq a<1$

$$\left[a+\frac{3}{8}\right]=1$$

$$5=4(k+a),\ k+a=\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{8}\leq a=\frac{5}{4}-k<1$$

$$\frac{1}{4}<k\leq\frac{5}{8}$$

Ответ: уравнение имеет единственное решение

Европа 10.7

Пусть для каждого натурального $n (n \geq 1)$

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$

Найдите

$$\frac{a_{1945}}{a_{1946}} + \frac{a_{1946}}{a_{1947}} + \dots + \frac{a_{2019}}{a_{2020}}$$

если $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Докажите по индукции, что $a_n = \frac{1}{n!}(n \geq 0)$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n-1)}{n!(n+1)} - \frac{(n-2)}{(n-1)! \cdot n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-3)!(n-2) \cdot n(n+1)} - \frac{1}{(n-3)!(n-1)n(n+1)} =$$

$$= \frac{n-1-n+2}{(n-3)!(n-2)(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1946 + 1947 + \dots + 2020 = \frac{(1946+2020)}{2}75 = 148725$$

Ответ: 148725

Задача 8
Доказать, что для всякого треугольника ABC имеет место равенство

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\geq\frac{9}{4}$$

m_a, m_b, m_c - медианы на стороны треугольника с длинами a, b, c соответственно.
Решение:

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{b^2}\left(\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)+\frac{1}{c^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)-\frac{3}{4}$$

Но $\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2$, $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\geq 2$, $\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2$, поэтому

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\geq\frac{1}{2}\cdot 6-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

Знак равенства имеет место при $a=b=c$.

Задача 9

1. На гиперболе $y = \frac{1}{x}$ взяты две точки $M(x_0; y_0)$ и $N(-x_0; -y_0)$ симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Найдите площадь треугольника с вершинами в этих трёх точках.

Решение: Пусть точки A, B, C лежат на окружности с центром M. Тогда треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда $AO+OB+OC = 3OM$

Из данного равенства сразу следует, что $MA + MB + MC = 0$, но это означает, что точка M совпадает с центром тяжести треугольника ABC, т.е. с точкой пересечения медиан. Таким образом, длины всех медиан треугольника ABC равны. Отсюда следует, что этот треугольник правильный.

Теперь приступим к решению задачи. Пусть координаты точке A, B, C, M равны соответственно $(x_A; y_A)$ $(x_B; y_B)$ $(x_C; y_C)$ $(x_M; y_M)$. По условию

$$\begin{cases} xy = 1, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)^2 \end{cases}$$

Подставив $y = \frac{1}{x}$ из первого уравнения системы во второе, после несложных преобразований получаем уравнение для x:

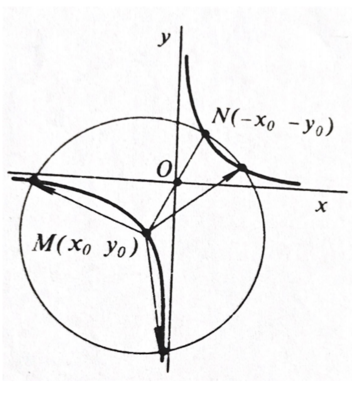
$$x^4 - 2x_0x^3 + \cdots = 0.$$

Мы выписали только два старших члена, поскольку остальные слагаемые нас не интересуют. По теореме Виета сумма всех корней этого уравнения, включая корень $(-x_0)$, равна $2x_0$. Поэтому $x_A + x_B + x_C = 3x_0$. Аналогично $y_A + y_B + y_C = 3y_0$.

Последние равенства означают, что

$$OA + OB + OC = 3OM$$

O - начало координат. Осталось воспользоваться заданной нами леммой
Ответ: $3\sqrt{3}(x_0^2 + y_0^2)$



Европа 10.10

Пусть А – множество, состоящее из 100 элементов. Сколько решений имеет уравнение

$$X \cup Y \cup Z = A,$$

если X, Y, Z – подмножества множества А.

Решение:

$$X 00100111$$

$$Y 01001011$$

$$Z 00011101$$

$$A 01111111$$

Ответ: $N = 7^{100}$