

XXVI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2018»

Заключительный тур

11 класс



▷ 1 .Известно, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = 0$  и для любых действительных  $x$  удовлетворяет уравнению  $20f(18x) = f(x) + x^2$ . Сколько существует целых  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < \frac{x}{2018}?$$

▷ 2 .Три равных шара радиусом 1 лежат на одной плоскости и попарно касаются друг друга. Конус с углом  $60^\circ$  в вершине осевого сечения стоит основанием на той же плоскости и касается боковой поверхности каждого шара. Найти радиус основания конуса.

▷ 3 .Сколько целых решений имеет неравенство

$$x^6 - 17x^4 - 12x^3 + 33x^2 + 4x - 1 \leq 0?$$

▷ 4 .Робот из клеточного поля  $11 \times 11$  случайным образом выбивает одну клетку, не имеющую общих точек с границей этого поля. Какова вероятность того, что существует возможность разрезать оставшуюся часть доски на прямоугольники размером  $1 \times 3$  клетки?

▷ 5 .При каких натуральных  $n$  существует ровно 2018 острых углов  $\alpha$  таких, что

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin(2n - 1)\alpha = 0?$$

▷ 6 .В семизначном числе, имеющем 108 делителей, первая цифра (слева) 1, вторая 0. Это же число, уменьшенное в 12 раз, имеет 70 делителей, а увеличенное в 18 раз — 160 делителей. Найти это число.

▷ 7 .Найти такое натуральное число  $n$ , чтобы сумма

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

являлась квадратом некоторого натурального числа.

▷ 8 .Определить в целых числах стороны тупоугольного треугольника, периметр и площадь которого выражаются одним и тем же целым числом.

▷ 9 .Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{\cos^3 18^\circ}{\cos x} + \frac{\sin^3 18^\circ}{\sin x} = 1$$

в промежутке  $[0^\circ, 2018^\circ]$ ?

▷ 10 .В боковых гранях некоторой треугольной пирамиды с вершиной в точке  $S$  проведены биссектрисы  $SM, SN, SK$ , длины которых  $l_1, l_2, l_3$ . Найдите объем пирамиды  $SMNK$ , если известно, что один из ее плоских углов при вершине  $S$  не тупой, а другой не острый.