

XXVI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2018»

Заключительный тур

10 класс

▷ 1 .Найти целое число N , содержащее простыми множителями только 2, 5 и 7, зная, что:

- 1) $5N$ имеет на 8 делителей больше, чем N ;
- 2) $7N$ имеет на 12 делителей больше, чем N ;
- 3) $8N$ имеет на 18 делителей больше, чем N .

▷ 2 .Для треугольника со сторонами a, b, c имеет место соотношение:

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Определить вид треугольника.

▷ 3 .Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$z = x^2 + xy + y^2,$$

при условии

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

▷ 4 .Доказать, что существует не менее пяти различных разбиений прямоугольной доски на пять треугольников, из которых можно сложить квадрат.

▷ 5 .Найти целое число x такое, что сумма

$$1 + 2 + 3 + \dots + x$$

является трехзначным числом, все цифры которого одинаковы.

▷ 6 .Определить сторону равностороннего треугольника, если расстояния от некоторой внутренней его точки до вершин равны a, b и c .

▷ 7 .Сколько существует несократимых дробей с знаменателем 218, удовлетворяющих неравенству

$$x^4 - 2x^3 + 6x - 9 \leq 0?$$

▷ 8 .Решить в целых числах уравнение:

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = 1$$

▷ 9 .Окружность данного радиуса R разделена на 10 равных частей. Соединив последовательно хордами первую точку с четвертой, четвертую с седьмой и т.д., получим двадцатиугольник с десятью входящими и десятью выходящими углами. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, равновеликий этому двадцатиугольнику.

▷ 10 .Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\sqrt{x^4 + 4x - 1}(x^4 - 4x^3 - 1) < 0.$$