Решение задач 9 класса.

▷ **1.** дяди Кота Матроскина на складе гуталина видимо-невидимо да еще два ящика массой 5 и 8 кг. Докажите, что он сможет отмерить с помощью чашечных весов без гирь 218 кг этого полезного продукта. За какое наименьшее число взвешиваний это можно сделать?

Решение: В следующих равенствах слева находятся слагаемые, равные уже имеющимся массам гуталина на одной чаше весов, справа — масса куска на второй чаше, получаемая в результате данного взвешивания. Сначала имеем две массы — 5 и 8.

1) $5+8=13$ — теперь у нас три массы 5, 8, 13.

2) $5+8+13=26$ — имеем 5, 8, 13, 26

3) $5+8+13+26=52$ — имеем 5, 8, 13, 26, 52

4) $5+8+13+26+52=104$ — имеем 5, 8, 13, 26, 52, 104

5) в пятом взвешивании на одну чашу весов кладем массы 13 и 5, на вторую — 8. Уравновесим весы и получим массу 10.

Итого после пяти взвешиваний имеем массы 5, 8, 13, 26, 52, 104, 10, которые в сумме дают 218.

Ответ: 5

▷ **2.** Докажите, что квадратное уравнение

$$ax^2+bx-c=0$$

имеет ровно один корень на отрезке [0;1], если числа a, b и c выражают длины сторон некоторого треугольника.

Решение: Графиком данного уравнения является парабола, ветви которой направлены вверх. Далее, поскольку сумма двух сторон треугольника больше третьей, получаем:

$$\begin{cases} f(1)=a+b-c>0, \\ f(0)=-c<0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка [0;1] значения разных знаков, то есть на этом отрезке есть точки, в которых $f(x)=0$, т.е. корни рассматриваемого уравнения. По теореме Виета находим, что произведение корней уравнения должно быть отрицательно: $x_1x_2=-\frac{c}{a}<0$. Т.е. один корень положительный, а другой отрицательный. Поскольку мы знаем, что положительный корень только один, то на отрезке [0;1] наше уравнение имеет ровно один корнь.

▷ **3.** ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. Прямая a перпендикулярна его оси симметрии. Треугольник MNK симметричен треугольнику ABC относительно a. Как расположить прямую aтак, чтобы площадь пересечения названных треугольников была наибольшей?

Решение: Эта задача — частный случай следующей задачи:

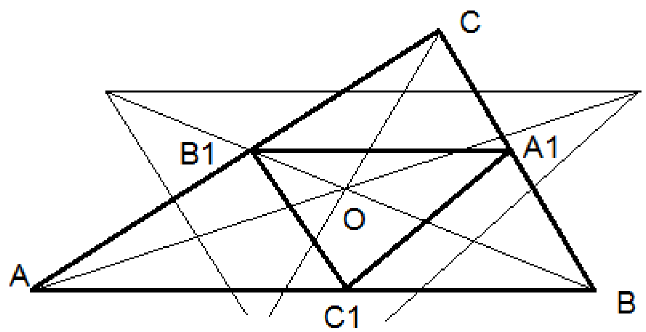
В данный треугольник поместите центрально симметричный многоугольник наибольшей площади.

Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T=ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник. Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x:y:z$, где $x+y+z=1$. Тогда отношение суммы площадей заштрихованных треугольников к площади треугольника ABC равно $x^2+y^2+z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1=(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$, то $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$, причем равенство достигается только при $x=y=z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, например внутри AB_1C_1. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причем если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x=0$).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника.



Ответ: Прямая a должна проходить через точку пересечения медиан треугольника ABC и (MNK).

▷ **4.** Докажите, что в любом году найдется 13-е число, приходящееся на пятницу.

Решение: Чтобы 13-е число пришлось на пятницу, месяц должен начинаться с воскресенья. Докажем, что в любом году найдется месяц, который начинается с воскресенья. Занумеруем дни недели числами: 0,1,2,3,4,5,6. Здесь за номером 0 может "скрываться"любой день недели, главное, чтобы они шли по порядку. Например, вторник — 0, среда — 1, четверг — 2, пятница — 3, суббота — 4, воскресенье — 5, понедельник — 6. Високосные и невисокосные года придется рассматривать отдельно.

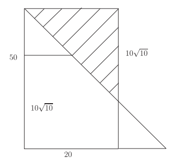
1) Рассмотрим невисокосный год. В месяце может быть 28, 30 и 31 день. Эти числа при делении на 7 дают в остатке соответственно 0, 2 и 3. Пусть январь начинается с дня 0, тогда февраль начинается с дня 3, март тоже — с дня 3, апрель — с дня 6, май — с дня 1, июнь — с дня 4, июль — с дня 6, август — с дня 2, сентябрь — с дня 5. Итак, уже нашлись месяцы, начинающиеся с каждого дня недели, в том числе и с воскресенья. Следовательно, в каждом невисокосном году есть пятница, 13-е.

2) Рассмотрим високосный год. Пусть январь начинается с дня 0, тогда февраль начинается с дня 3, март — с дня 4, апрель — с дня 0, май — с дня 2, июнь — с дня 5, июль — с дня 0, август — с дня 3, сентябрь — с дня 6, октябрь — с дня 1. Итак, снова нашлись месяцы, начинающиеся с каждого дня недели, в том числе и с воскресенья. Следовательно, и в каждом високосном году есть пятница, 13-е.

Значит, в любом году найдется 13-е число месяца, приходящееся на пятницу.

$\triangleright$ **5.** Имеется прямоугольная доска размером 50см $\times$ 20см. Можно ли разрезать ее на 3 части так, чтобы из полученных фигур получился квадрат?

Решение:



$\sqrt{20 \times 50} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$

Ответ: $10\sqrt{10}$

$\triangleright$ **6.** На доске написано три числа. За один ход разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать числа $\frac{a}{b}$ и b^2. Можно ли с помощью таких операций из тройки $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 1+\sqrt{3}\right)$ получить тройку $\left(\sqrt{3}, 3, \frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)$?

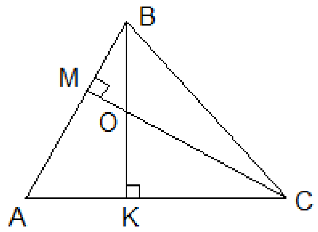
Решение: Обозначим через P произведение всех чисел в тройке. Очевидно, что P не меняется после каждого хода (это инвариант). Однако для первой тройки $P = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$, а для второй $P = \frac{3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}+1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ответ: нельзя.

$\triangleright$ **7.** Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $OC = AB$. Найдите угол при вершине C.

Решение:

Рассмотрим случай, когда $\angle BCK$ — острый. Учитывая, что $OC = AB$, а $\angle ABK = \angle OCK$ (углы со взаимными перпендикулярными сторонами), видим,



что $\triangle\ ABK =\triangle\ OCK$ (по гипотенузе и острому углу), отсюда $BK = CK$. Значит, $\triangle\ BKC$ — равнобедренный и $\angle BCK = 45°$.

Аналогично рассматриваем случай, когда $\angle BCK$ — тупой. В этом случае $\angle BCK = 135°$.

Ответ: $45°$ или $135°$.

$\triangleright$ **8.** В клетки таблицы $n \times n$ ($n > 3$) вписаны числа 0 и 1 так, что в клетках каждого квадрата 2×2 стоит ровно три одинаковых числа. Какое максимальное значение может принимать сумма всех чисел в этой таблице?

Решение: Очевидно, что если k — минимально возможное число нулей в таблице, то искомая сумма достигает максимума, равного числу $n^2 - k$.

В любой таблице $n \times n$ можно выделить $\left[\frac{n}{2}\right]^2$ непересекающихся 2×2 квадратов, где через $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначена целая часть числа $\frac{n}{2}$ ($\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$, если n четно; $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно). В каждом таком 2×2 квадрате содержится либо три нуля, либо один нуль, т.е. не менее одного нуля. Тогда во всей таблице $n \times n$ найдется не менее $\left[\frac{n}{2}\right]^2$ нулей, а значит искомое число $k = \left[\frac{n}{2}\right]^2$. Приведем пример таблицы $n \times n$ с минимальным числом нулей, равным $\left[\frac{n}{2}\right]^2$.

1	1	1	1	...
1	0	1	0	
1	1	1	1	
1	0	1	0	
...				

В приведенной таблице нули находятся лишь на пересечении строки и столбца с четными номерами.

Таким образом, максимальное значение суммы всех чисел в таблице равно $n^2 - \left[\frac{n}{2}\right]^2$.

Ответ: $n^2 - \left[\frac{n}{2}\right]^2$

$\triangleright$ **9.** При каком наименьшем натуральном m выражение

$$3^{2018} + 5^{2018} + m$$

делится на 13?

Решение: Будем следить, какие остатки дают степени 3 и 5 при делении на 13. Обозначим эти остатки чисел 3^n и 5^n через r_n и r'_n соответственно. Последовательно находим остатки при делении r_n при делении 3^n на 13:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r_n	1	3	9	1	3	9	1	...

(Для того, чтобы составить такую таблицу, вовсе не нужно делить $3^5, 3^6, \ldots$ на 13: ясно, что если $3^n - 3r_n$ тоже делится на 13, так что остаток r_{n+1} можно получить просто как остаток при делении $3r_n$ на 13.) Таким образом, остатки повторяются с периодом 3, поэтому $r_{2018} = r_{3\cdot 672+2} = r_2 = 9$.

Для остатков, получающихся при делении на 13 чисел 5^n, имеем такую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r'_n	1	5	12	8	1	2	12	...

Здесь период равен 4, и $r'_{2018} = r'_{4\cdot 504+2} = r'_2 = 12$. Таким образом, 3^{2018} дает в остатке 9, 5^{2018} дает в остатке 12, получаем

$$12 + 9 + m = 26,$$

$$m = 5.$$

Ответ: 5

▷ **10.** Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50×50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливает через свое ребро на соседнюю клетку; при это разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?

Решение: Пусть мы каким-то образом прокатили кубик из левого нижнего угла доски в правый верхний. Будем считать, что после каждого перекатывания через ребро на клетке доски отпечатывается число, записанное на той грани кубика, которая опиралась на эту клетку.

Отпечатавшиеся числа $a_1, \ldots, a_{99}$ выпишем подряд в строчку, а их сумму обозначим через S:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} = S.$$

Если числа на всех гранях кубика заменить средним числом 3,5, то сумма отпечатавшихся чисел будет равна

$$S_{cp} = 3,5 \cdot 99 = 346,5.$$

Нам необходимо определить наибольшее и наименьшее значения S. Оценим для этого величину $|S - S_{cp}|$.

Самое важное свойство чисел в последовательности $a_1, \ldots, a_{99}$ заключается в следующем. Пусть в этой последовательности число a встретилось два раза подряд (a — одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Так как числа a и $(7-a)$ находятся на противоположных гранях кубика, то нетрудно проверить, что между двумя встречающимися подряд числами a обязательно содержится число $7-a$. Поэтому для каждого $1 \le a \le 3$ возможны три ситуации:

1) либо чисел a в последовательности столько же, сколько и чисел $7-a$;

2) либо чисел a ровно на одно больше, чем чисел $7-a$;

3) либо чисел a ровно на одно меньше, чем чисел $7-a$.

В случае 1) от замены всех чисел a и $7-a$ на 3,5 их вклад в S не изменится. В случаях 2) и 3) от замены всех чисел a и $7-a$ на 3,5 их вклад в S увеличится или уменьшится на $(3,5-a)$. В результате вся сумма увеличится или уменьшится самое большее на

$$(3,5-1) + (3,5-2) + (3,5-3) = 4,5.$$

Таким образом,

$$342 = S_{cp} - 4,5 \le S \le S_{cp} + 4,5 = 351.$$

Значения $S_{max} = 351$ и $S_{min} = 342$ - ответ на вопрос задачи.

Ответ: $S_{max} = 351$ и $S_{min} = 342$