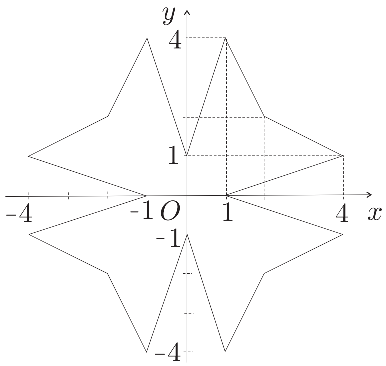
Решение задач 8 класса.

▷ **1.** На листе бумаги ввели прямоугольную систему координат xOy, перегнули лист по одной оси координат, затем — по другой, сложенный таким образом вчетверо лист разрезали ножницами по ломанной с вершинами в точках $(0;1)$, $(1;4)$, $(2;2)$, $(4;1)$, $(1;0)$. Нарисуйте образовавшуюся при развертывании «снежинку» и найдите ее площадь.

Решение.



Развернутая снежинка показана на рисунке. Не трудно видеть, что ее площадь $S = 4\left(2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\frac{3}{2}\right) = 28$(квадратных единиц).

▷ **2.** Пусть запись $a \oplus b$ обозначает наибольшее из чисел $a+b$ и $2a$, а $a \otimes b$ наименьшее из чисел $a+b$ и $2a$. Решите уравнение

$$x \otimes 20 = 18 \oplus x.$$

Решение.

$$x \otimes 20 = \begin{cases} 2x, x \leq 20 \\ x+20, x \geq 20 \end{cases}$$

$$18 \oplus x = \begin{cases} 36, x \leq 18 \\ x+18, x \geq 18 \end{cases}$$

Ответ: $x = 18$.

▷ **3.** Однажды в ОЦ «Сириус» за круглым столом оказалось пятеро ребят родом из Москвы, Самары, Белгорода, Саранска и Томска: Юра, Толя, Алеша, Коля и Витя. Москвич сидел между томичем и Витей, белгородец — между Юрой и Толей, а напротив них сидел мальчик из Саранска и Алеша. Коля никогда не бывал в Самаре, а Юра не бывал в Москве и Томске, а томич с Толей регулярно переписываются. Определите, в каком городе живет каждый из ребят.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся таблицей 5×5.

Города	Имена				
	Юра	Толя	Алеша	Коля	Витя
Москва					
Самара					
Белгород					
Саранск					
Томск					

Так как москвич сидит между томичем и Витей, то Витя не живет ни в Москве, нив Томске. Это позволяет поставить знак «—» в клетках: L_{51} и L_{55}.

Так как самарец сидел между Юрой и Толей, а напротив сидели житель Саранска и Алеша, то Юра, Толя и Алеша не живут ни в Самаре, ни в Саранске. Это позволяет поставить знак «—» в клетках: L_{12}, L_{14}, L_{24}, L_{32}, L_{34}.

Так как Коля никогда не был в Самаре, Юра не бывал в Москве и Томске, а томич с Толей регулярно переписываются, то это означает, что Коля не живет в Самаре, Юра не живет нив Томске, ни в Москве, а Толя не живет в Томске, следовательно, знак «—» нужно поставить в клетках: L_{12}, L_{41}, L_{11}, L_{15}, L_{25}.

В результате таблица принимает вид:

Города	Имена				
	Юра	Толя	Алеша	Коля	Витя
Москва	—				—
Самара	—	—	—	—	
Белгород					
Саранск	—	—	—		
Томск	—	—			—

Теперь, очевидно, нужно поставить знак «+» в клетках L_{52} и L_{13} и, следовательно, поставить знак «+» нужно поставить в клетке L_{44} и знак «—» в клетках L_{41} и L_{45}.

Теперь для полного заполнения таблицы остается поставить знак «+» в клетках L_{35} и L_{21}, а «—» в клетке L_{31}. и таблица принимает следующий вид:

Города	Имена				
	Юра	Толя	Алеша	Коля	Витя
Москва	—	+	—	—	—
Самара	—	—	—	—	+
Белгород	+	—	—	—	—
Саранск	—	—	—	+	—
Томск	—	—	+	—	—

▷ **4.** Натуральное число назовем интересным, если в его десятичной записи любые две цифры, стоящие рядом, образуют двузначное число, кратное либо 17, либо 23. Сколько существует интересных 1998-значных чисел, начинающихся с цифры 6?

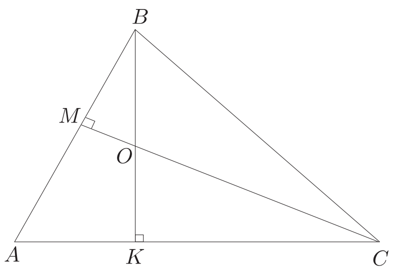
Решение.

Рассмотрим все двузначные числа, кратные 17 или 23. Это 17, 23, 34, 46. 51, 68, 69, 85, 92. Обратим внимание, что нет среди них числа, начинающегося с 7. К чему бы это? Попробуем строить число от 68. За цифрой 8 однозначно ставим цифру 5, потом также однозначно 1 и 7, а дальше уже ставить нечего. Значит. если после цифры 6 поставить цифру 8, то через три цифры процесс прекратится, и, по крайней мере среди первых 1994 интересных цифр интересного 1998-значного числа цифры 8 нет. А что позволит нам сделать число 69? 692346... Повторяя период из пяти чисел — 69234, появляется надежда выписать и 1998-значное число. $1998 = 5 \cdot 399 + 3$. Так что волно развернуться можно только на последних трех цифрах, да и то начинать придется все-таки с 6. Итак, есть только две возможности: 685 и 692. Т.е. существует только 2 интересных 1998-значных числа.

Ответ: 2.

▷ **5.** Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $OC = AB$. Найдите угол при вершине C.

Решение.



Рассмотрим случай, когда $\angle BCK$ — острый угол. Учитывая, что $OC = AB$, а $\angle ABK = \angle OCK$ (углы со взаимными перпендикулярными сторонами), видим, что $\triangle CBK = \triangle OCK$ (по гипотенузе и острому углу), отсюда $BK = KC$. Значит, $\triangle BKC$ — равнобедренный и $\angle BCK = 45°$.

Аналогично рассматриваем случай, когда $\angle BCK$ — тупой, в этом случае $\angle BCK = 135°$.

Ответ: $45°$ или $135°$.

▷ **6.** Докажите, что существует последовательность 2018-ти составных, подряд идущих натуральных чисел.

Решение.

$n = 2019! + 1$

$$n + 1 = 2019! + 2 = 2N_1$$

$$n + 2 = 2019! + 3 = 3N_2$$

$$\ldots$$

$$n + 2018 = 2019! + 2019 = 2019N_{2018}$$

▷ **7.** У Винни-Пуха есть два камня весом 5 и 8 кг. Сможет ли он с помощью чашечных весов без гирь не более чем за десять взвешиваний отмерить 218 кг меда?

Решение.

1. $5 + 8 = 13$кг
2. $5 + 8 + 13 = 26$кг
3. $5 + 8 + 39 = 52$кг
4. $5 + 8 + 91 = 104$кг
5. $26 + 5 = x + 8$кг

Получаем, что $x = 23$. Итого: $13 + 26 + 52 + 104 + 23 = 218$кг. Получаем 5 взвешиваний.

Ответ: 5 взвешиваний.

▷ **8.** Некто N родился в XIX веке. В 1901 г. сумма цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года его рождения. В каком году родился N?

Решение.

Обозначим через x и y цифры единиц и десятков года рождения N, тогда год рождения выразится числом:

$$1800 + 10y + x. \tag{1}$$

Число лет, прожитых N до 1902 года будет равно:

$$1901 - (1800 + 10y + x) = 101 - 10y - x. \tag{2}$$

Допустим сначала, что $x > 1$. Тогда (2) может быть представлено так:

$$90 - 10y + 11 - x = 10\,(9 - y) + 11 - x, \tag{3}$$

где $9 - y$ является цифрой десятков, а $11 - x$ цифрой единиц возраста N в 1901 г. Сумма цифр года рождения N, то есть числа (1), равна

$$1 + 8 + y + x = 9 + y + x, \tag{4}$$

а сумма цифр возраста N в 1901 году, то есть числа (3), равна

$$9 - y + 11 - x = 20 - y - x. \tag{5}$$

По условию (4) и (5) должны быть равны. Отсюда

$$9 + y + x = 20 - y - x \tag{6}$$

$$2\,(y + x) = 11$$

$$y + x = \frac{11}{2}$$

чего быть не может, так как x и y — числа целые.

Значит, x может быть равен только 0 или 1. Тогда разность (2) будет иметь вид:

$$100 - 10y + 1 - x = 10\,(10 - y) + (1 - x)$$

и сумма цифр этого числа равна

$$10 - y + 1 - x = 11 - y - x.$$

По условию имеем:

$$9 + y + x = 11 - y - x.$$

Отсюда

$$x + y = 1$$

Итак, возможны два случая:

1) $x = 1$, $y = 0$. Тогда год рождения N будет 1801 и возраст его в 1901 г. равен 100 годам. Сумма цифр этих чисел: 10 и 1 не равны. Следовательно, это решение не годится.

2) $x = 0$, $y = 1$. Тогда год рождения N будет 1810-й и возраст его в 1901 г. равен 91 году. Сумма цифр этих чисел будут 10 и 10, то есть удовлетворяют условию задачи.

Итак, N родился в 1810-м году.

Ответ: 1810.

▷ **9.** Дана тройка чисел 1, 2, 7. Каждое число заменяем суммой двух других и получаем новую тройку. С новой тройкой поступаем так же. Какое число будет записано в сотой строке? В тысяча первой строке?

Решение.

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

Получаем, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 7$.

$$S_{n+1} = 2S_n$$

$$S_2 = 2 \cdot 10$$

$$S_3 = 2^2 \cdot 10$$

$$\dots$$

$$S_{n+1} = 2^n \cdot 10$$

Получаем, что

$$a_{n+1} + a_n = S_n$$

$$a_n + a_{n-1} = S_{n-1}$$

$$a_{n-1} + a_{n-2} = S_{n-2}$$

$$a_{n-2} + a_{n-3} = S_{n-3}$$

$$\dots$$

$$a_3 + a_2 = S_2$$

$$a_2 + a_1 = S_1$$

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots (-1)^{n-1} S_n = a_1 + (-1)^{n-1} a_{n+1}$$

$$S \cdot \frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1} = a_1 + (-1)^{n-1} a_{n+1}$$

$n = 99$

$$a_{100} = 10 \cdot \frac{2^{99} + 1}{3} - a_1$$

$n = 3$

$$10 \cdot 3 - a_1 = a_4$$

Ответ: $S = \frac{10}{3}\left(2^{99} + 1\right)$, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 7$.

▷ **10.** У двух братьев было стадо баранов. Они продали его и за каждого барана получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Выручку стали делить пополам. Старшему брату — десятку, младшему — десятку и так несколько раз. Потом старший брат взял свою десятку, а младшему не хватило несколько рублей. Тогда старший вынул из кармана нож и отдал брату вместо за недостающую сумму. Сколько стоит нож?

Решение.

x — количество голов, следовательно, $x^2 = (2n + 1) \cdot 10 + y + z$.

n — количество десяток, которые получил младший брат.

y — количество рублей, которые получил младший брат при последнем делении.

z — стоимость ножа.

$y + z = 10$

1) Количество голов однозначное.

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. $x^2 = 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81$.

а) 6 овец

$36 = 3 \cdot 10 + 6$

$6 + z = 10$

$z = 4$рубля — не подходит.

б) 4 овцы

$16 = 1 \cdot 10 + 6$ — не подходит, так как младший брат получил хотя бы одну десятку.

2) Число голов неоднозначное.

$x = 10a + b$

$x^2 = \underbrace{100a^2 + 2ab \cdot 10}_{\text{четное число}} + b^2$

$b = 4$ и $b^2 = 16$

$b = 6$ и $b^2 = 36$

$x^2 = \underbrace{100a^2 + 2ab \cdot 10}_{\text{четное число}} + b^2$

$x^2 = 2(n + 1) \cdot 10 + 6$, получаем $z = 4$.

Ответ: 4.