

Решение задач 7 класса.

▷ 1. Натуральное число назовем интересным, если в его десятичной записи любые две цифры, стоящие рядом, образуют двузначное число, кратное либо 17, либо 23. Сколько существует интересных 2018ти-значных чисел, начинающихся с цифры 6?

Ответ: 2 числа : $\underbrace{69234\dots 69234}_{2015}923$ и $\underbrace{69234\dots 69234}_{2015}851$

▷ 2. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым.

«Вот тебе меч-кладенец — говорит ему баба Яга. — Одним ударом ты можешь срубить либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Но запомни: срубишь один хвост — два вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет, срубишь голову — голова вырастет, срубишь две головы — ничего не вырастет».

За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею все головы и хвосты?

Решение.

Так как по условию задачи только рубка двух голов Змея одновременно приводит к их полной ликвидации, то перед полной ликвидацией Змея необходимо добиться, чтобы у него оставалось только четное число голов. Поскольку Змей имеет три головы, то следует рубить ему хвосты так, чтобы это привело к получению еще трех голов. В связи с этим Иван-царевич можно поступить следующим образом:

1. Первыми тремя ударами Иван-царевич рубит каждый хвост пополам, и тогда у Змея будет шесть хвостов.
2. Следующими тремя ударами Иван-царевич рубит хвосты Змея попарно и в результате получает к имеющимся трем хвостам еще три головы.
3. Наконец, последними тремя ударами Иван-царевич рубит попарно шесть голов Змея, и тот побежден девятью ударами.

▷ 3. Пусть запись $a \oplus b$ обозначает наименьшее из чисел $a + b$ и $2a$. Решите уравнение

$$x \oplus 20 = 18 \oplus x.$$

Решение.

$$a \oplus b = \min\{a + b, 2a\}$$

$$x \oplus 20 = \begin{cases} 2x, & x \geq 20 \\ x + 20, & x < 20 \end{cases}$$

$$18 \oplus x = \begin{cases} 36, & x \leq 18 \\ x + 18, & x > 18 \end{cases}$$

Ответ: $x = 18$.

▷ 4. Назовем число зеркальным, если слева направо оно читается так же, как и справа налево. Например, 563365 — шестизначное зеркальное число. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, делящихся на 4?

Решение. 04, 08, 12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, ... , 20...10, 40, 10, 04

Всего 200. **Ответ:** 200.

▷ 5. Найдите все числа, меньшие 1000, квадраты которых заканчиваются двумя одинаковыми, не равными нулю цифрами.

Решение.

Число не может оканчиваться на 0.

1. Пусть $n = 10k \pm 1$. $n^3 = (10k \pm 1)^2 = 100k^2 \pm 20k + 1$. Последняя цифра 1, предпоследняя нечетная; $n \neq 10k \pm 1$.
2. Пусть $n = 10k \pm 3$. $n^3 = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9$. Последняя цифра 9, предпоследняя четная; $n \neq 10k \pm 3$.
3. Пусть $n = 10k \pm 4$. $n^3 = (10k \pm 4)^2 = 100k^2 \pm 80k + 16$. Последняя цифра 6, предпоследняя нечетная; $n \neq 10k \pm 4$.
4. Пусть $n = 10k \pm 5$. $n^3 = (10k \pm 5)^2 = 100k^2 \pm 100k + 25$. Число оканчивается на 25; $n \neq 10k \pm 5$.
5. Пусть $n = 10k + 2$. $n^3 = (10k + 2)^2 = 100k^2 + 40k + 4$. $4k$ должно оканчиваться на 4, т. е. $k = 5l + 1$, $n = 10k + 2 = 10(5l + 1) + 2 = 50l + 12$. $0 < 50l + 12 < 1000$, $0 \leq l \leq 19$.
6. Пусть $n = 10k - 2$. $n^3 = (10k - 2)^2 = 100k^2 - 40k + 4$. $4k$ должно оканчиваться на 6, т. е. $k = 5l + 4$, $n = 10k - 2 = 10(5l + 4) - 2 = 50l + 38$. $0 < 50l + 38 < 1000$, $0 \leq l \leq 19$.

Квадрат натурального числа может оканчиваться на 44: $n = 12; 38; 62; 88; \dots$

Ответ: $n = 12; 38; 62; 88; \dots$

▷ 6. При сложении двух десятичных дробей по ошибке во второе слагаемое поставили запятую на одну цифру правее, чем следовало, и получили в сумме 49,1 вместо 27,95. Определите слагаемые.

Решение.

1. $49,1 - 27,95 = 21,15$ — на столько увеличили второе слагаемое.
2. $21,15 : 9 = 2,35$ — второе слагаемое.
3. $27,95 - 2,35 = 25,6$ — первое слагаемое.

Ответ: 25,6 и 2,35.

▷ 7. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $\frac{1}{7}$ учеников получила пятерки, $\frac{1}{3}$ — четверки, $\frac{1}{2}$ — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

Решение.

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{41}{42}$$

— работ, написанных не на 2. Получаем $\frac{1}{42}$ — оставшиеся работы, то есть 1 работа написана на 2.

Ответ: 1.

▷ **8.** Все нечетные числа выписываются подряд: 1357911315... Какая цифра стоит на 2018 месте?

Решение.

Однозначных — 5

Двузначных — 45

Трехзначных — 450

Всего чисел: $5 + 90 + 1350 = 1445$

$2018 - 1445 = 573 = 572 + 1 = 4 \cdot 143 + 1$

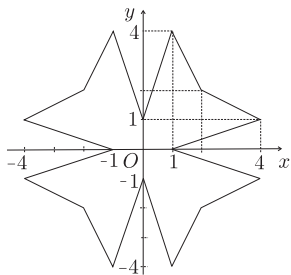
первая цифра у 144 четырехзначного числа — 1.

Ответ : 1.

▷ **9.** На листе бумаги ввели прямоугольную систему координат xOy , перегнули лист по одной оси координат, затем — по другой, сложенный таким образом вчетверо лист разрезали ножницами по ломанной с вершинами в точках $(0; 1)$, $(1; 4)$, $(2; 2)$, $(4; 1)$, $(1; 0)$. Нарисуйте образовавшуюся при развертывании «снежинку» и найдите ее площадь.

Решение.

Развернутая снежинка показана на рисунке. Не трудно видеть, что ее площадь $S = 4 \left(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} \right) = 28$ (ед. квадрат).



▷ **10.** У Винни-Пуха есть два бочонка меда массой 4 и 9 кг. Докажите, что с помощью чашечных весов без гирь медвежонок может отмерить любое целое (от 1 до 13) число кг меда.

Решение.

1. $9 - 4 = 5$ кг

2. $5 - 4 = 1$ кг

3. $4 - 1 = 3$ кг

4. $4 + 4 + 1 = 9$ кг