

Решение задач 6 класса.

▷ 1. Некоторое число возвели в третью степень. Полученное трехзначное число записали в обратном порядке и получили простое число. Найдите исходное число.

Решение.

$$100 \leq N < 1000$$

$$5 \leq N < 10$$

Исходное число — 5. $5^3 = 125$, 521 — простое число.

Ответ: 5.

▷ 2. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $\frac{1}{7}$ учеников получила пятерки, $\frac{1}{3}$ — четверки, $\frac{1}{2}$ — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

Решение.

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{41}{42}$$

— работ, написанных не на 2. Получаем $\frac{1}{42}$ — оставшиеся работы, то есть 1 работа написана на 2.

Ответ: 1.

▷ 3. Площадь пересечения круга и трапеции составляет 72 % площади их объединения, при этом площадь трапеции вне круга составляет 10 % площади их объединения. Сколько процентов площади круга находится вне трапеции?

Решение.

Обозначим через z — площадь объединения трапеции и круга. Тогда, в соответствии с условием задачи, площадь пересечения круга и трапеции равна $0,72z$; площадь трапеции вне круга — $0,1z$; площадь круга вне трапеции равна $z - 0,82z = 0,18z$; вся площадь круга равна $0,18z + 0,72z = 0,9z$.

Отсюда следует, что процентное отношение площади круга, лежащей вне трапеции, ко все площади круга равно $\frac{0,18z}{0,9z} \cdot 100 = 20(\%)$.

Ответ: 20%.

▷ 4. На какое число нужно умножить 333667, чтобы получить в произведении число, изображенное восьмерками.

Решение.

Число единиц множимого 7. Для того, чтобы число единиц произведения было равно 8, число единиц множителя должно быть равно 4. Производим умножение: $333667 \cdot 4 = 1334668$.

Для того, чтобы в произведении число десятков равнялось 8, необходимо, чтобы 7 при умножении на число десятков множителя давало бы первое (справа) число 2. Следовательно, число десятков множителя равно 6. Тогда имеем: $333667 \cdot 64 = 21354688$. таким же путем найдем, что число сотен множителя должно быть равно 6, и получим: $333667 \cdot 664 = 221554888$.

Наконец, находим, что число тысяч множителя должно быть равно 2, и, умножив данное число на 2664, получим требуемое число 88888888.

Ответ: 2664.

▷ 5. Некто N родился в XIX веке. В 1901 г. сумма цифр числа лет, прожитых им, равнялась сумме цифр года его рождения. В каком году родился N ?

Решение.

Обозначим через x и y цифры единиц и десятков года рождения N , тогда год рождения выразится числом:

$$1800 + 10y + x. \quad (1)$$

Число лет, прожитых N до 1902 года будет равно:

$$1901 - (1800 + 10y + x) = 101 - 10y - x. \quad (2)$$

Допустим сначала, что $x > 1$. Тогда (2) может быть представлено так:

$$90 - 10y + 11 - x = 10(9 - y) + 11 - x, \quad (3)$$

где $9 - y$ является цифрой десятков, а $11 - x$ цифрой единиц возраста N в 1901 г. Сумма цифр года рождения N , то есть числа (1), равна

$$1 + 8 + y + x = 9 + y + x, \quad (4)$$

а сумма цифр возраста N в 1901 году, то есть числа (3), равна

$$9 - y + 11 - x = 20 - y - x. \quad (5)$$

По условию (4) и (5) должны быть равны. Отсюда

$$9 + y + x = 20 - y - x \quad (6)$$

$$2(y + x) = 11$$

$$y + x = \frac{11}{2}$$

чего быть не может, так как x и y — числа целые.

Значит, x может быть равен только 0 или 1. Тогда разность (2) будет иметь вид:

$$100 - 10y + 1 - x = 10(10 - y) + (1 - x)$$

и сумма цифр этого числа равна

$$10 - y + 1 - x = 11 - y - x.$$

По условию имеем:

$$9 + y + x = 11 - y - x.$$

Отсюда

$$x + y = 1$$

Итак, возможны два случая:

- 1) $x = 1, y = 0$. Тогда год рождения N будет 1801 и возраст его в 1901 г. равен 100 годам. Сумма цифр этих чисел: 10 и 1 не равны. Следовательно, это решение не годится.
- 2) $x = 0, y = 1$. Тогда год рождения N будет 1810-й и возраст его в 1901 г. равен 91 году. Сумма цифр этих чисел будут 10 и 10, то есть удовлетворяют условию задачи.

Итак, N родился в 1810-м году.

Ответ: 1810.

▷ **6.** Длины сторон прямоугольника целые числа. Найдите их, если площадь прямоугольника на единицу меньше его периметра.

Решение.

Обозначим длины сторон через x и y . Без ограничения общности будем считать, что $x \leq y$. По условию задачи составим уравнение

$$xy - 1 = 2(x + y).$$

Принимая во внимание, что $x \leq y$, получим

$$xy - 1 \leq 4y \quad \text{или} \quad y(x - 4) \leq 1.$$

Числа x и y — целые, поэтому неравенство может выполняться только в том случае, когда $x \leq 4$. Значит, x может быть равен 1, 2, 3 или 4. Непосредственная проверка показывает, что удовлетворяет условию только $x = 3$. В этом случае $y = 5$.

Ответ: (3,5) или (5,3).

▷ **7.** Запишите в строчку одно за другим 11 первых простых чисел в возрастающем порядке. В полученном многозначном числе зачеркните половину цифр так, чтобы число, образованное оставшимися цифрами, было

- 1) наибольшим из возможных;
- 2) наименьшим из возможных.

Решение.

- 1) Речь идет о числе 235711131719232931. В нем 18 цифр. Следовательно, надо зачеркнуть 9 цифр. Легко доказать, что зачеркивать цифры надо так, чтобы получилось число 779232931. Оно будет наибольшим.

Ответ: 1) 779232931; 2) 111112231.

▷ **8.** Сколько единиц в записи числа:

$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9 \dots 9}_{2018}$$

Решение.

$$S = 10^{\frac{10^{2018}-1}{9}} - 2018 = \underbrace{11 \cdot 10}_{2018} - 2018. \text{ Всего } 2014 \text{ единиц.}$$

Ответ: 2014.

▷ **9.** Учащиеся школы раздали тетради так, что учащиеся одного класса получили равные количества тетрадей, а учащие разных классов — разные. Известно, что 7 девятиклассников и 10 пятиклассников получили вместе 140 тетрадей. Сколько тетрадей получил каждый учащийся?

Решение.

Пусть m — число тетрадей каждого девятиклассника, n — число тетрадей каждого пятиклассника. Тогда $7m + 10n = 140$, или $7m = 10(14 - n)$. Поскольку $7m$ делится на 10, m делится на 10, $m = 10k$. $70k + 10n = 140$; $n = 7(2 - k)$. k — целое, $0 < k < 2$, поэтому $k = 1, m = 10, n = 7$.

Ответ: $k = 1, m = 10, n = 7$.

▷ **10.** У Винни-Пуха есть два бочонка меда массой 5 и 8 кг. Докажите, что с помощью чашечных весов без гирь медвежонок может отмерить любое целое (от 1 до 13) число кг меда.

Решение.

$$1 = 5 - 8 : 2$$

$$2 = (8 : 2) : 2$$

$$3 = 8 - 5$$

$$4 = 8 : 2$$

$$5 = 9 - 3 - 1$$

$$6 = 9 - 3$$

$$7 = 9 - 3 + 1$$

$$8 = 9 - 1$$

$$10 = 9 + 1$$

$$11 = 9 + 3 - 1$$

$$12 = 9 + 3$$

$$13 = 9 + 3 + 1$$