XXVI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2018»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1 .**Найти целое число N, содержащее простыми множителями только 2, 5 и 7, зная, что:

1) $5N$ имеет на 8 делителей больше, чем N;
2) $7N$ имеет на 12 делителей больше, чем N;
3) $8N$ имеет на 18 делителей больше, чем N.

Решение: Число N имеет вид:

$$N = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z.$$

Число его делителей по известной формуле равно

$$(x+1)(y+1)(z+1).$$

Число $5N = 2^x \cdot 5^{y+1} \cdot 7^z$ и число его делителей равно:

$$(x+1)(y+2)(z+1).$$

Согласно условию:

$$(x+1)(y+2)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 8$$

или:

$$(x+1)(z+1) = 8.$$

Число $7N = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^{z+1}$. Аналогично предыдущему, получим:

$$(x+1)(y+1) = 12.$$

Наконец, $8N = 2^{x+3} \cdot 5^y \cdot 7^z$, откуда найдем:

$$3(y+1)(z+1) = 18$$

или:

$$(y+1)(z+1) = 6.$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными, которая обычно решается так. Перемножив три уравнения системы, найдем

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 8 \cdot 12 \cdot 6,$$

откуда

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 24.$$

Деля это уравнение последовательно на первое, второе и третье уравнение системы, получим:

$$y+1 = 3; \quad z+1 = 2; \quad x+1 = 4.$$

Отсюда:

$$x = 3; \quad y = 2; \quad z = 1.$$

Следовательно,

$$N = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1400.$$

Ответ: 1400

▷ **2 .**Для треугольника со сторонами a, b, c имеет место соотношение:

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Определить вид треугольника.

Решение: После подстановки

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

получим:

$$a^4 + b^4 + a^4 + b^4 + 4a^2b^2\cos^2 C + 2a^2b^2 - 4a^3b\cos C - 4ab^3\cos C =$$

$$= a^2b^2 + a^2b^2 + b^4 - 2ab^3\cos C + a^4 + a^2b^2 - 2a^3b\cos C.$$

Отсюда, разлагая многочлен по степеням $\cos C$, будем иметь:

$$4a^2b^2\cos^2 C - 2ab(a^2+b^2)\cos C + a^4 + b^4 - a^2b^2 = 0,$$

$$\cos C =$$

$$= \frac{ab(a^2+b^2) \pm \sqrt{a^2b^2(a^2+b^2) - 4a^2b^2(a^4+b^4-a^2b^2)}}{4a^2b^2} =$$

$$= \frac{ab(a^2+b^2) \pm ab\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^4-4b^4+4a^2b^2}}{4a^2b^2} =$$

$$= \frac{ab(a^2+b^2) \pm ab\sqrt{(-3)(a^4+b^4-2a^2b^2)}}{4a^2b^2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2 \pm (a^2-b^2)\sqrt{-3}}{4ab}.$$

Но $\cos C$ не может быть мнимым числом. Следовательно, должно быть $a^2 - b^2 = 0$, т.е. $a = b$. Тогда

$$\cos C = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}, \qquad C = 60^\circ,$$

и так как $a = b$, т.е. треугольник равнобедренный, то имеем:

$$A = B = 60^\circ,$$

т.е. треугольник правильный.

Решение 2: Преобразуем заданное выражение:

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0,$$

или:

$$2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0;$$

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(a^4-2a^2c^2+c^4)+(b^4-2b^2c^2+c^4)=0;$$

$$(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2=0.$$

Очевидно, что это равенство может иметь место только при

$$a^2-b^2=0,\quad a^2-c^2=0,\quad b^2-c^2=0,$$

т.е. при

$$a=b=c.$$

Ответ: равносторонний

▷ **3 .**Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$z=x^2+xy+y^2,$$

при условии

$$1\le x^2+y^2\le 2.$$

Решение: Представим данную функцию z в виде тождества:

$$z=x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}[3(x^2+y^2)-(x-y)^2].$$

Так как выражение x^2+y^2 ограничено, то наибольшее значение функции z будет при $x-y=0$, отсюда $x=y$, тогда

$$1\le 2x^2\le 2,\quad \textbf{или}\quad 0,5\le x^2\le 1,$$

и

$$z=x^2+xy+y^2=3x^2.$$

Отсюда имеем:

$$x^2=\frac{z}{3},$$

поэтому

$$1,5\le z\le 3.$$

Для нахождения наименьшего значения функции z преобразуем ее следующим образом:

$$z=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)+(x+y)^2].$$

Так как выражение x^2+y^2 ограничено, то наименьшее значение функции z будет зависеть от величины выражения $(x+y)^2$, и так как это выражение не может быть отрицательным, то наименьшее значение $(x+y)^2$ будет равно нулю, т.е. $x+y=0$, отсюда $x=-y$.

В этом случае z будет иметь свое наименьшее значение. Имеем:

$$1\le 2x^2\le 2,\quad \textbf{или}\quad 0,5\le x^2\le 1,$$

$$z=x^2-x^2+x^2=x^2$$

$$0,5\le z\le 1.$$

Итак, наибольшее значение z

$$1,5\le z\le 3,$$

а наименьшее

$$0,5\le z\le 1.$$

Объединив два последних неравенства, получим:

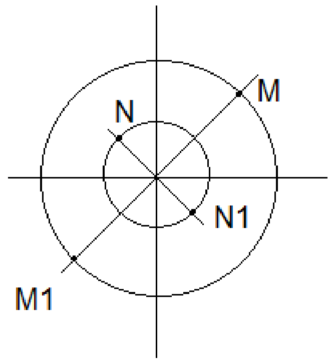
$$0,5\le z\le 3.$$

Наименьшее значение z, равное 0,5, будет при $x=-y$, $\pm\sqrt{0,5}\le x\le\pm 1$, т.е. при

$$x=\pm\sqrt{0,5}\qquad y=\mp\sqrt{0,5},$$

а наибольшее, равное 3, будет при

$$y=x=\pm 1.$$



В геометрической интерпретации это означает, что x и y — координаты точек плоскости, заключенной между двумя концентрическими окружностями с общим центром в начале координат, радиусы которых равны 1 и $\sqrt{2}$, и точек этих двух окружностей. В точках M и M_1 имеем максимум функции z, в точках N и N_1 — минимум.

Решение 2: Перейдем от прямоугольной системы координат к полярной, положив

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

имеем:

$$1 \le r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \le 2,$$

$$1 \le r^2 \le 2,$$

$$z = x^2 + xy + y^2 = r^2(\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$

Поскольку известна оценка r^2, получим:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ge z \ge \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

или

$$1\left(1 - \frac{1}{2}\right) \le z \le 2\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

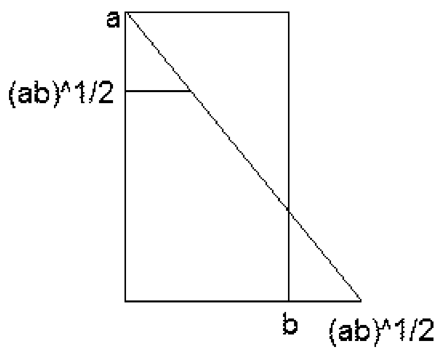
Итак,

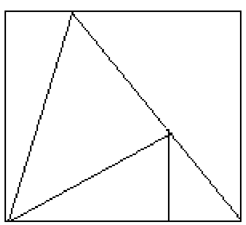
$$\frac{1}{2} \le z \le 3.$$

Ответ: 3; 0,5

▷ **4 .**Доказать, что существует не менее пяти различных разбиений прямоугольной доски на пять треугольников, из которых можно сложить квадрат.

Решение: Разделим прямоугольник на два треугольника и пятиугольник, как указано на рисунке. Очевидно, из них можно сложить квадрат. Тогда остается произвольно разбить пятиугольник на три треугольника. Это можно сделать пятью способами (по числу вершин, в каждом способе из вершины проводим два отрезка к несмежным вершинам).





▷ **5 .**Найти целое число x такое, что сумма

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x$$

является трехзначным числом, все цифры которого одинаковы.

Решение: Имеем по условию:

$$\frac{x(x+1)}{2} = 100y + 10y + y = 111y, \qquad x(x+1) = 222y,$$

где $1 \le y \le 9$.

Определим границы для x. Из предыдущего неравенства имеем

$$x^2 < 222y; \qquad (x+1)^2 > 222y.$$

Давая y наименьшее и наибольшее из возможных значений, получим:

$$222 < (x+1)^2; \qquad 9 \cdot 222 > x^2,$$

или

$$x + 1 > 14; \qquad x < 45.$$

Итак:

$$13 < x < 45.$$

Тогда

$$y = \frac{x(x+1)}{2 \cdot 3 \cdot 37}.$$

Следовательно, один из множителей числителя должен делиться на 37. Два случая:

а) $x = 37k$, $13 < 37k < 45$, отсюда $k = 1$; $\quad x = 37$; $\quad x + 1 = 38$; $\quad y$ — не целое число;

б) $x + 1 = 37k$, $k = 1$; $\quad x = 36$; $\quad x + 1 = 37$; $\quad y = 6$; $\quad s = 666$.

Ответ: 36

▷ **6 .**Определить сторону равностороннего треугольника, если расстояния от некоторой внутренней его точки до вершин равны a, b и c.

Решение: Обозначив искомую сторону через x, данную точку через O и угол BAO через α, из треугольника AOB найдем:

$$b^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\alpha.$$

Откуда:

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax}.$$

Таким же путем из треугольника AOC найдем:

$$\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2ax},$$

или:

$$\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2ax}.$$

Делая сюда подстановку выражения для $\cos\alpha$, получим:

$$\sin\alpha = \frac{x^2+a^2+b^2-2c^2}{2\sqrt{3}ax}.$$

Возводя выражения для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в квадрат и складывая, получаем уравнение

$$\left(\frac{x^2+a^2-b^2}{2ax}\right)^2 + \left(\frac{x^2+a^2+b^2-2c^2}{2\sqrt{3}ax}\right)^2 = 1,$$

которое после упрощений представляется в виде

$$x^4-(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)=0.$$

Решив это уравнение, получим:

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm \sqrt{3}\sqrt{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}}{2}$$

(в предположении, что $a \geq b \geq c$, что не уменьшает общности).

Для действительности корней необходимо:

$$4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2 > 0,$$

откуда:

$$2bc > a^2-b^2-c^2$$

$$(b+c)^2 > a^2 \qquad b+c > a,$$

т.е. отрезки a, b и c должны быть заданы такими, чтобы из них можно было построить треугольник.

Ответ:

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm \sqrt{3}\sqrt{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}}{2}$$

$\triangleright$ **7 .**Сколько существует несократимых дробей с знаменателем 218, удовлетворяющих неравенству

$$x^4-2x^3+6x-9 \leq 0?$$

Решение: Преобразуем неравенство:

$$x^4-2x^3+x^2-(x^2-6x+9) \leq 0,$$

$$x^2(x-1)^2-(x-3)^2 \leq 0,$$

$$(x^2-2x+3)(x^2-3) \leq 0.$$

Первый множитель всегда положителен. Поэтому неравенство сводится к

$$x^2-3 \leq 0$$

отсюда

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Найдем число несократимых дробей со знаменателем 218, удовлетворяющих неравенству. Рассмотрим положительные m:

$$\frac{m}{218} \leq \sqrt{3},$$

$$0 < m^2 \leq 3 \cdot 218^2 = 142572.$$

Так как

$$377^2 < 142572 < 378^2,$$

то

$$377 < \sqrt{142572} < 378,$$

поэтому m может принимать значения от 1 до 377 включительно. Исключим те значения, при которых дробь сокращается. Так как $218 = 2\cdot 109$, то исключаем все четные числа: $m \neq 2k$ и нечетные, кратные 109: $m \neq 109, m \neq 327$. Тогда получаем $377-188-2=187$ положительных дробей. Для отрицательных m решение аналогично. Итого 187 положительных и 187 отрицательных дробей.

Ответ: 187 положительных и 187 отрицательных дробей. Всего 374.

$\triangleright$ **8 .**Решить в целых числах уравнение:

$$1!+2!+3!+\ldots+x! = 1^3+2^3+\ldots+y^3.$$

Решение: Заметим, что

$$1^3+2^3+\ldots+y^3 = \left(\frac{y(y+1)}{2}\right)^2.$$

Таким образом, правая часть является квадратом некоторого числа. Теперь обозначим через S_n сумму n слагаемых в левой части. Имеем:

$1! = 1$	$S_1 = 1$
$2! = 2$	$S_2 = 3$
$3! = 6$	$S_3 = 9$
$4! = 24$	$S_4 = 33$
$5! = 120$	$S_5 = 153$

Видно, что для любого $n \geq 5$ число $n!$ заканчивается на 0, а следовательно S_n заканчивается на 3. Поскольку квадрат числа не может заканчиваться на 3, нам нужно рассмотреть два случая: $x=1$ и $x=3$. В первом случае $S_1 = 1$, то есть

$$\left(\frac{y(y+1)}{2}\right)^2 = 1,$$

$$y(y+1) = 2,$$

$$y = 1.$$

Во втором случае $S_3 = 9$

$$\left(\frac{y(y+1)}{2}\right)^2 = 9,$$

$$y(y+1)=6,$$

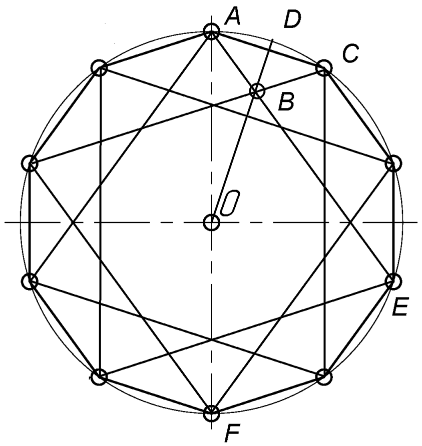
$$y=2.$$

Получаем два решения $x=1, y=1$ и $x=3, y=2$.

Ответ: (1;1), (3;2)

▷ **9 .**Окружность данного радиуса R разделена на 10 равных частей. Соединив последовательно хордами первую точку с четвертой, четвертую с седьмой и т.д., получим двадцатиугольник с десятью входящими и десятью выходящими углами. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, равновеликий этому двадцатиугольнику.

Решение: Очевидно, все стороны многоугольника равны между собой, все входящие углы равны между собой, все выходящие углы также. Данный многоугольник можно рассматривать как сумму двадцати треугольников, равных



AOB. Вычислим площадь этого треугольника. В этом треугольнике $\angle A=36^\circ$, как вписанный, опирающийся на дугу $FE=72^\circ$; $\angle O=18^\circ$ как центральный, опирающийся на дугу $AD=\frac{AC}{2}=18^\circ$. Имеем

$$S_{\Delta AOB}=\frac{AO\cdot OB\cdot\sin 18^\circ}{2}.$$

Но $AO=R$; OB найдем по теореме синусов:

$$\frac{OB}{\sin 36^\circ}=\frac{AO}{\sin 126^\circ}\quad\text{или}\quad\frac{OB}{\sin 36^\circ}=\frac{AO}{\cos 36^\circ}.$$

Отсюда

$$OB=R\operatorname{tg}36^\circ.$$

Получаем

$$S_{\Delta AOB}=\frac{R^2\sin 18^\circ\operatorname{tg}36^\circ}{2}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4};\quad\operatorname{tg}36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

и сделав подстановку в предыдущее выражение, найдем

$$S_{\Delta AOB}=\frac{R^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{8}.$$

Подведя $(\sqrt{5}-1)$ под радикал, получим

$$S_{\Delta AOB}=\frac{R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{8},$$

откуда искомая площадь

$$S=20\cdot S_{\Delta AOB}=\frac{5}{2}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Отсюда найдем выражение для стороны квадрата

Ответ:

$$a=\sqrt{\frac{5}{2}R\sqrt{50R^2-22R^2\sqrt{5}}}$$

▷ **10 .**Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\sqrt{x^4+4x-1}(x^4-4x^3-1)<0.$$

Решение: Рассмотрим уравнение

$$x^4+4x-1=0.$$

Перепишем его в виде

$$x^4=-4x+1.$$

Чтобы сделать правую часть квадратом, прибавим к обеим частям по $2x^2+1$. Получим:

$$x^4+2x^2+1=2(x^2-2x+1)$$

или

$$(x^2+1)^2=2(x-1)^2,$$

откуда:

$$x^2+1=\pm\sqrt{2}(x-1)$$

Таким образом, имеем два квадратных уравнения:

$$x^2-\sqrt{2}(x-1)+1=0,$$
$$x^2+\sqrt{2}(x-1)+1=0.$$

Решаем первое уравнение:

$$x^2-\sqrt{2}x+(\sqrt{2}+1)=0$$

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-4\sqrt{2}-2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}.$$

или:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}.$$

Решаем второе уравнение:

$$x^2 + \sqrt{2}x - (\sqrt{2}-1) = 0$$

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

или:

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 1 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$x^4 - 4x^3 = 1.$$

Прибавив к обеим частям равенства x^4+2x^2, получим в обеих частях квадраты:

$$2(x^4 - 2x^3 + x^2) = x^4 + 2x^2 + 1$$

или

$$2x^2(x-1)^2 = (x^2+1)^2.$$

Отсюда:

$$\pm\sqrt{2}x(x-1) = x^2 + 1.$$

Получим два квадратных уравнения:

$$x^2 - \sqrt{2}x(x-1) + 1 = 0,$$
$$x^2 + \sqrt{2}x(x-1) + 1 = 0.$$

или

$$(\sqrt{2}-1)x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0,$$
$$(\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0.$$

Решаем первое уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2(\sqrt{2}-1)}$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2-\sqrt{2}}.$$

Второе уравнение дает

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-4\sqrt{2}-2}}{2(\sqrt{2}+1)}.$$

или

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-2\sqrt{2}-2}}{2+\sqrt{2}}.$$

Теперь вернемся к неравенству. Оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^4 - 4x^3 - 1 < 0, \\ x^4 + 4x - 1 > 0. \end{cases}$$

Оцениваем действительные корни и наносим их на координатную прямую.

Ответ: 10