XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

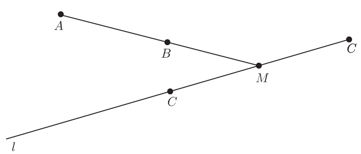
Заключительный тур

9 класс

▷ **1.** Провести через точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой l, окружность, касающуюся прямой l.

Решение

1) AB не параллельна l.
$|MC|^2 = |MA||MB|$
$|MC| = \sqrt{|MA||MB|}$, т.е. решения 2.



2)Если $AB \parallel l$ — одно единственное решение.

Ответ: 1) Если AB непараллельна l, решения два. 2) Если прямые параллельны - решение единственно

▷ **2.** Найдите все трехзначные числа, в которых количества сотен, десятков и единиц образуют:

1) арифметическую прогрессию;

2) геометрическую прогрессию.

Решение

Пусть $N = \overline{abc}$, следовательно количество сотен — a, десятков — $\overline{ab} = 10a+b$, а единиц — $100a + 10b + c$.

1) $2(10a + b) = a + 100a + 10b + c$;

   $20a + 20b = 101a + 10b + c$;

   $0 = 81a + 8b + c$, что невозможно.

2) $(10a + b)^2 = a(100a + 10b + c)$;

   $100a^2 + 20ab + b^2 = 100a^2 + 10ab + ac$;

   $10ab + b^2 = acb^2 = a(c - 10b)$, следовательно $c - 10b \geq 0$, но $c - 10b \leq 0$, так как c и b — цифры, значит, $b = c = 0$, тогда a — любое.

Ответ: 1)нет таких чисел, 2) 9 чисел: 100, 200, ... , 900.

▷ **3.** Докажите, что для катетов a, b и гипотенузы c прямоугольного треугольника выполняется неравенство

$$(a + b)c \geq 2\sqrt{2}ab.$$

Решение

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{2}ab \Leftrightarrow (a + b)^2(a^2 + b^2) \geq 8a^2b^2$
Известно, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
$(a+b)^2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \cdot 2ab = (a^2+b^2+2ab) \cdot 2ab \geq (2ab+2ab) \cdot 2ab = 8a^2b^2$
Утверждение доказано.

▷ **4.** Число $\frac{2017}{2^{2017}}$ записали в виде конечной десятичной дроби. Какая цифра стоит на четвертом месте с конца?

Решение

$$\frac{2017}{2^{2017}} = 2017 \cdot 5^{2017} \cdot 10^{-2017}$$

$2017 = 4 \cdot 504 + 1$
$2017 \cdot 5 = 10085,\ n = 1$
$10085 \cdot 5 = 20425,\ n = 2$
$20425 \cdot 5 = 32125,\ n = 3$
$32125 \cdot 5 = 40625,\ n = 4$
$40625 \cdot 5 = 53125,\ n = 5$
$53125 \cdot 5 = 65625,\ n = 6$
$65625 \cdot 5 = 78125,\ n = 7$
$78125 \cdot 5 = 80625,\ n = 8$

Видно, что последние четыре цифры начинают повторяться, для четвертой цифры с конца получаем цикл 0-3-5-8. То есть для $n = 4, 8, \ldots, 2016, \ldots$ четвертая цифра с конца - 0, а для $n = 2017$ получаем то же окончание, что и для $n = 5$.

Ответ: 3

▷ **5.** Найти все точки плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\begin{cases} \max\{x, x^2\} = \min\{y, y^2\}, \\ \min\{x, x^2\} + \max\{y, y^2\} = 1. \end{cases}$$

Решение

Поскольку

$$max\{x, x^2\} = \left[\begin{array}{ll} x^2, & x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x, & x \in [0; 1] \end{array} \right.$$

и

$$min\{x, x^2\} = \left[\begin{array}{ll} x, & x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x^2, & x \in [0; 1] \end{array} \right.$$

то рассмотрев все участки, получим для первого соотношения:

$$\begin{cases} y = x^2, & x < -1, \\ y = -x, & x \in [-1, 0), \\ y = \sqrt{x}, & x \in [0, 1], \\ y = x^2, & x > 1, \end{cases}$$

и для второго соотношения:

$$\begin{cases} x = 1 - y^2, & y < -1, \\ x = \sqrt{1 - y^2}, & y \in [-1, 0), \\ x = \sqrt{1 - y}, & y \in [0, 1], \\ x = 1 - y^2, & y > 1, \end{cases}$$

Эти два набора точек пересекаются в двух местах: в квадрате, где $0 \le x, y \le 1$ получаем систему

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y + x^2 = 1 \end{cases}$$

Вторая точка пересечения при $x < -1, y > 1$ определяется решением системы

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Эти системы приводят к уравнениям 4 порядка, которые можно решить методом Кардано.

▷ **6.** Последовательно выписаны в порядке возрастания все шестизначные числа, в записи которых присутствуют $0, 1, 2, 3$. Какое число записано на 1993-ем месте?

Решение

$T = 4^5 \cdot 3 = 3072$— количество шестизначных чисел, которые можно составить из набора цифр.

$\underbrace{100000, \ldots, 1333\ldots3}_{1024}, \underbrace{200000, \ldots, 203333}_{256}, \underbrace{210000, \ldots, 213333}_{256}, \underbrace{220000, \ldots, 223333}_{256}$
$\underbrace{230000, \ldots, 230333}_{64}, \underbrace{231000, \ldots, 231333}_{64}, \underbrace{232000, \ldots, 232333}_{64}, \underbrace{233000, \ldots, 233003}_{4},$
$\underbrace{233010, \ldots, 233013}_{4}, 233020.$

Получаем, что $a_{1993} = 233020$.

Ответ: 233200

▷ **7.** Докажите, что существует такое натуральное n, что $1993^n - 1$ делится нацело на 2017.

Доказательство: Рассмотрим 2018 чисел

$$1993^1 - 1, 1993^2 - 1, \ldots 1993^{2018} - 1.$$

Остатков при делении на 2017 — 2017. Следовательно по признаку Дирихле существует 2 числа, имеющих одинаковый остаток.

Пусть это $1993^i - 1$ и $1993^j - 1$, $j > i$, тогда

$((1993^i - 1) - (1993^j - 1)) \vdots 2017,$

$(1993^j (1993^{i-j} - 1)) \vdots 2017$, следовательно $(1993^{i-j} - 1) \vdots 2017$.

▷ **8.** Пусть $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot \overline{a_4 a_5 a_6} + 2017.$$

Решение: Пусть $x = \overline{a_1 a_2 a_3}$, $y = \overline{a_4 a_5 a_6}$. x, y — целые трехзначные числа. Тогда $1000x + y = xy + 2017$, $1000x - 1000 - xy + y = 1017$, $(x - 1)(1000 - y) = 1017 = 3 \cdot 3 \cdot 113$. Тогда либо $x - 1 = 113$, $1000 - y = 9$, либо $x - 1 = 339$, $1000 - y = 3$. То есть получаем наборы 114 и 991, 340 и 997.

Ответ: 340997, 114991

▷ **9.** В двух неодинаковых банках с водой растворили по одной килограммовой пачке сахара, получив 40% и 60% растворы сахара. Скольки процентный раствор сахара получится после смешивания этих объемов раствора?

Решение: Пусть в первой банке было x л воды, тогда $\frac{1}{x+1} = 0,4$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Пусть во второй банке было y л воды, тогда $\frac{1}{y+1} = 0,6$, откуда $y = \frac{2}{3}$. После смешивания получим концентрацию сахара :

$$\frac{2}{x + y + 2} = \frac{2}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 2} = \frac{12}{25} = 0,48$$

Ответ: 48%

▷ **10.** При каком a число решений уравнения $d(x) = a\sqrt{x}$, где $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа, равно

а) 2017;

б) 2018?

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{4030}} < a < \frac{1}{\sqrt{4026}}$ б) $a = \frac{1}{\sqrt{4034}}$