XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$$

В ответе укажите наименьший положительный угол в градусах.

Решение:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ - \sin x \cdot \cos 36^\circ = \cos x \cdot \sin 36^\circ$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ = \cos x \cdot \sin 36^\circ + \sin x \cdot \cos 36^\circ$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ = \sin(x + 36^\circ)$

$x = 48^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$2\sin 48^\circ \cdot \sin 42^\circ = \sin(48^\circ + 76^\circ)$

$2\cos 42^\circ \cdot \sin 42^\circ = \sin 84^\circ$

$\sin 84^\circ = \sin 84^\circ$ — верно.

Ответ: 48

▷ **2.** Какая цифра стоит на четвертом месте с конца в десятичной записи дроби $\frac{1993}{2^{2017}}$?

Решение:

$$\frac{1993}{2^{2017}} = \frac{1993 \cdot 5^{2017}}{10^{2017}}$$

$1993 \cdot 5 = 19965$

$19965 \cdot 5 = 29825$

$29825 \cdot 5 = 39125$

$39125 \cdot 5 = 45625$

$45625 \cdot 5 = 58125$

$58125 \cdot 5 = 60625$

$60625 \cdot 5 = 73125$

$73125 \cdot 5 = 85625$

$85625 \cdot 5 = 98125$

...

Последние четыре цифры — 8125.

Ответ: 8

▷ **3.** Каждую вершину квадрата соединили с серединами сторон квадрата, не проходящих через эту вершину. Середины смежных сторон соединили попарно. Найти наибольшее значение синуса внутреннего угла в получившейся при пересечении образовавшихся четырех треугольников фигуре.

Ответ: $\frac{3}{5}$

▷ **4.** Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$, если $x, y, z \geq 1$ и $x + y + z = 6$.

Решение:

$\sqrt{x-1} \leq \frac{x}{2}, \forall x \geq 1$

$x - 1 \leq \frac{x^2}{4}$

$0 \leq \frac{x^2}{4} - x + 1$

$0 \leq (x-2)^2$. Равенство при $x = 2$, следовательно

$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ — достигается при $x = y = z = 2$.

Ответ: 3

▷ **5.** Пусть $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа. При каком a уравнение:

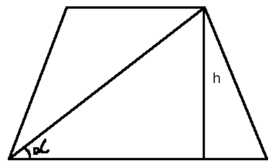
$$d(x) = \frac{x}{a}$$

имеет ровно 2017 решений?

Ответ: 2017

▷ **6.** Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна h. Какой может быть длина средней линии такой трапеции? Какова наименьшая возможная длина средней линии? Когда она получается?

Ответ:



x - средняя линия. $x = \frac{h}{sin2\alpha}$, минимальное значение $x = h$ получается при $\alpha = \pi/4$

▷ **7.** Найдите наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) \geq 1993 \cdot 2017.$$

Решение:

Запишем общий член суммы в виде $(k-1)k(k+1) = k^3 - k$, складываются выражения для $k = 1, \ldots, n+1$. Известно, что сумма кубов чисел от 1 до m равна $\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$, а сумма чисел от 1 до m равна $\frac{m(m+1)}{2}$. Тогда сумма членов вида $k^3 - k$ при $k = 1, \ldots, n+1$ равна

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{4}(n^2+3n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Получаем
$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \geq 1993 \cdot 2017 = 16079524$$
Подбором определим наименьшее n.

Ответ: $n = 62$

$\triangleright$ **8.** Можно ли разрезать квадрат 10×10 на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 2017?

Решение: Одно из возможных построений: отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{1}{2} \times 10$, его разрежем на 18 частей размером $\frac{1}{2} \times \frac{10}{18}$. Оставшуюся часть разрежем на 98 прямоугольников размером $\frac{\frac{19}{2}}{98} \times 10$. Сумма периметров: $P = 98(20 + \frac{19}{98}) + 18(\frac{20}{18} + 1) = 98 \cdot 20 + 19 + 20 + 18 = 2017$.

Ответ: да

$\triangleright$ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной $\sqrt[4]{10}$.

Решение: $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$; $(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) = 1$

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

$x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7 + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})$

$x^3 = 10\sqrt{2} + 3x$, пусть $x = y\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}y^3 - 3\sqrt{2}y - 10\sqrt{2} = 0$

$2y^3 - 3y - 10 = 0$

$(y-2)(2y^2 + 4y + 5) = 0$

$y = 2$, $x = 2\sqrt{2}$.

Имея отрезок длиной $2\sqrt{2}$ можно построить отрезок длиной $\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляр длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в середине данного отрезка получим прямоугольный треугольник с катетом 1. Имея отрезок длиной 1, построим прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3, получим гипотенузу $\sqrt{10}$. Поскольку $\sqrt[4]{10} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{10}}$, то откладывая на прямой от одной точки O в разные стороны отрезки 1 и $\sqrt{10}$ и строя на получившемся отрезке как на диаметре окружность, можем провести из точки O прямую h, перпендикулярную исходной прямой и получить точку пересечения h с окружностью. Расстояние от этой точки до исходной прямой $\sqrt[4]{10}$.

$\triangleright$ **10.** В одной прямоугольной половине квадрата 20×20 проведена единичная окружность, центр которой удален не менее, чем на 3 единицы от ее границы.

Случайным образом на второй половине, не видя первую окружность, рисуется такая же единичная окружность. Какова вероятность того, что существует квадрат, две противолежащие вершины которого принадлежат окружностям, а две другие — общей границе этих половин?

Решение: Чтобы построить необходимый квадрат, нужно отобразить окружность, относительно данной прямой, (если существуют точки пересечения этих окружностей, то такой квадрат существует) получив точку пересечения, через нее перпендикулярно данной прямой провести прямую, отрезок соединяющий 2 противолежащие окружности — диагональ квадрата, отложив такой же отрезок на прямой получаем вершины квадрата.

Ответ: $\pi/36$

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

11 класс

$\triangleright$ **1.** Решите уравнение $\sin x = 2\sin 20^\circ \sin(170^\circ - x)$.

Решение: $\sin(170^\circ - x) = \sin(x + 10^\circ) = \sin x \cos 10^\circ + \cos x \sin 10^\circ$

$\sin x = 2\sin 20^\circ(\sin x \cos 10^\circ + \cos x \sin 10^\circ)$

$\sin x = 2\sin 20^\circ \sin x \cos 10^\circ + 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$\sin x(1 - 2\sin 20^\circ \cos 10^\circ) = 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$1 - 2\sin 20^\circ \cos 10^\circ = 1 - \sin 30^\circ - \sin 10^\circ = \frac{1}{2} - \sin 10^\circ = \sin 30^\circ - \sin 10^\circ = 2\sin 10^\circ \cos 20^\circ$

$2\sin 10^\circ \cos 20^\circ \sin x = 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$\cos 20^\circ \sin x - \sin 20^\circ \cos x = 0$

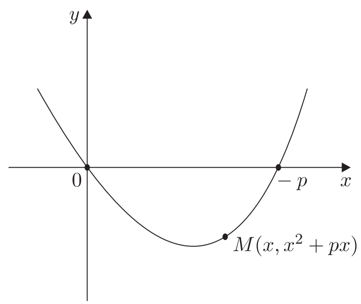
$\sin(x - 20^\circ) = 0$

$x = 20^\circ + 180^\circ n$

Ответ: $x = \pi/9 + \pi n$

$\triangleright$ **2.** Точка начинает движение из начала координат и движется по графику функции $y = x^2 + px$ и не меняет направление движения. При каком p эта точка всегда удаляется от начала координат?

Решение:



Пусть для определенности $p \leq 0$. если $p = 0$, то $y = x^2$ — подходит. Пусть $p < 0$. Функции $f(x) = OM = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2 + px - 0)^2}$ должна быть возрастающей, т.е. функция $y = x^2 + (x^2 + px)^2$ — возрастающая.

$y' = 2x + 2(x^2 + px)(2x + p) \geq 0$

При $x < 0$ — является возрастающей.

При $x > 0$ — неизвестно.

Сократим на $2x$:

$1 + (x + p)(2x + p) \geq 0$

$2x^2 + 3px + (p^2 + 1) \geq 0$