

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Отборочный тур

11 класс

Вариант 1



▷ 1. Найти значение выражения $\frac{1}{5(5+x)}\sqrt[4]{(5+x)(125+75x+15x^2+x^3)}$ при $x = -10,07$.

▷ 2. Имеется два слитка сплавов меди и олова. Первый слиток содержит 4 кг меди, а второй - 2 кг. Если сплавить оба эти слитка целиком, то получится сплав, содержащий 30% меди, а если взять только 9 кг от первого слитка и 6 кг от второго и сплавить, то получится сплав, содержащий 32% меди. Определить процентную концентрацию меди в первом сплаве.

▷ 3. Решите систему $\begin{cases} y(2^x + 8) = 20; \\ y - 2^x = 0. \end{cases}$ В ответе запишите значение выражения $4x^2 - 3y^2$, где (x, y) - решение системы.

▷ 4. Около трапеции с основаниями 21 и 9 и высотой 8 описана окружность. Чему равен радиус этой окружности?

▷ 5. Найдите наименьшее натуральное a при котором уравнение $x \diamond 2 = 2 \diamond 0 + a$ имеет натуральное решение, где $b \diamond c = \frac{b^2 - c^2 + 2c}{c+1}$.

▷ 6. Остаток от деления натурального числа n на 18 равен 5, остаток от деления n на 21 равен 11. Чему равен остаток от деления n на 14?

▷ 7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x \cdot y| = x^2 + 8; \\ x \cdot y = (x + y)^2 - 7y + 14. \end{cases}$ В ответе укажите $\max x_0^2 + y_0^2$, где (x_0, y_0) - решение системы.

▷ 8. Найти наименьшее из лежащих на отрезке $[-200\pi, 300\pi]$ решений уравнения:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{8} + \cos^{-2} \frac{x}{21} = 1.$$

В ответе укажите $\frac{x_0}{\pi}$, где x_0 - найденное решение.

▷ 9. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости заданы две параболы следующими уравнениями:

$$y = -x^2 - 7x - 12; y = x^2 - 5x + 3.$$

Найти минимальное значение расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит первой параболе, а другая - второй параболе. В ответе укажите квадрат этого значения.

▷ 10. Решите уравнение $\frac{1+x^5}{(1+x)^5} = 2101$.

XXIII Межрегиональная олимпиада

ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

«САММАТ-2015»

Отборочный тур



11 класс

Вариант 2

▷ 1. Найти значение выражения $\frac{1}{5(3-x)} \sqrt[4]{(3-x)(27-27x+9x^2-x^3)}$ при $x = 3,007$.

▷ 2. Имеется два сосуда с водными растворами кислоты, в каждом из которых содержится по 15 л чистой воды. Если смешать содержимое обоих сосудов, то получится 40% -ый раствор кислоты, а если взять только 21 л из первого сосуда и 35 л из второго, то получится раствор, объемная концентрация в котором равна 43,75 %. Определить объемную концентрацию кислоты в первом растворе.

▷ 3. Решите систему $\begin{cases} 5^x(y-0,2) = -1; \\ 5^x - y = 5. \end{cases}$ В ответе запишите наименьшее значение произведения $x \cdot y$, где (x, y) - решение системы.

▷ 4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ боковые стороны $AB = 17$ и $CD = 15$. Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB, AD, DC .

▷ 5. Найдите наименьшее натуральное a при котором уравнение $x \circ 2 = 2 \circ 0 + a$ имеет целое решение, где $b \circ c = \frac{c+bc-b}{b+1}$.

▷ 6. Остаток от деления натурального числа n на 8 равен 5, остаток от деления n на 9 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 12?

▷ 7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2 - |x \cdot y| + 2 = 0; \\ 7 - x^2 = (x + 2y)^2 - x. \end{cases}$ В ответе укажите $\max x_0 \cdot y_0$, где (x_0, y_0) - решение системы.

▷ 8. Найдите ближайшее к числу 599 решение уравнения

$$\cos \frac{x}{4} - 2 \sin^2 \frac{x}{12} + \cos \frac{x}{8} = 2.$$

В ответе укажите $\frac{x_0}{\pi}$, где x_0 - решение удовлетворяющее условию задачи.

▷ 9. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости заданы две параболы следующими уравнениями:

$$y = x^2 - 2; y = -2x^2 + 18x - 41.$$

Найти минимальное значение расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит первой параболе, а другая - второй параболе.

▷ 10. Решите уравнение $\frac{1+x^5}{(1+x)^5} = 31$. В ответе укажите сумму решений уравнения.

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Отборочный тур

11 класс

Вариант 3



▷ 1. Найти значение выражения $\frac{1}{4(2+x)} \sqrt[4]{(2+x)(8+12x+6x^2+x^3)}$ при $x = -4,07$.

▷ 2. Имеется два сосуда с водными растворами кислоты. Первый сосуд содержит 20 л чистой кислоты, а второй - 10 л чистой кислоты. Если смешать содержимое обоих сосудов, то получится 60 % -ый раствор кислоты, а если взять 15 л из первого сосуда и 25 л из второго, то получится раствор, объемная концентрация кислоты в котором равна 56,25%. Определите объемную концентрацию кислоты в первом растворе.

▷ 3. $\begin{cases} 8^x y + 25 = 7(8^x - 1); \\ y - 8^x = -5. \end{cases}$ В ответе укажите наибольшее y удовлетворяющее данной системы.

▷ 4. У трапеции, вписанной в окружность, диагонали перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите площадь трапеции.

▷ 5. Найдите наименьшее натуральное a при котором уравнение $x \circ 2 = 2 \circ 1 + a$ имеет целое решение, где $b \circ c = \frac{b-2bc+c^2}{c}$.

▷ 6. Остаток от деления натурального числа n на 12 равен 11, остаток от деления n на 14 равен 3. Чему равен остаток от деления n на 21?

▷ 7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{3}|x \cdot y| = x^2 + 6; \\ (2x - \sqrt{3}y)^2 - 8y + y^2 + 12 = 0. \end{cases}$ В ответе укажите $\min x_0^2 + y_0^2$, где (x_0, y_0) - решение системы.

▷ 8. Найти наименьшее положительное решение уравнения:

$$\cos^2 \frac{x}{90} + \cos^2 \frac{x}{84} + \cos^2 \frac{x}{24} = 3.$$

В ответе запишите $\frac{x_0}{\pi}$, где x_0 - найденное решение.

▷ 9. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости заданы две параболы следующими уравнениями:

$$y = 0,5x^2 + x + 0,5; y = -x^2 + 8x - 14.$$

Найти минимальное значение расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит первой параболе, а другая - второй параболе. В ответе укажите квадрат этого значения.

▷ 10. Решите уравнение $\frac{1+x^5}{(1+x)^5} = 211$. В ответе укажите сумму корней уравнения, увеличенную в 42 раза.

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Отборочный тур



11 класс

Вариант 4

▷ 1. Найти значение выражения $\frac{1}{4(x-4)}\sqrt[4]{(x-4)(x^3-12x^2+48x-64)}$

при $x = 2014$.

▷ 2. Имеется два слитка сплавов цинка и свинца. Первый слиток содержит 7 кг цинка, а второй - 3 кг цинка. Если сплавить оба эти слитка целиком, то получится сплав, содержащий 40% цинка, а если взять только 4 кг от первого слитка и 12 кг от второго и сплавить, то получится сплав, содержащий 32,5% цинка. Определить процентную концентрацию меди в первом сплаве.

▷ 3. Длины оснований трапеции равны 4 см и 2 см, один из углов при большем основании составляет 60° . Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности.

▷ 4. Длины оснований трапеции равны 4 см и 2 см, один из углов при большем основании составляет 60° . Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности.

▷ 5. Найдите наименьшее целое a при котором уравнение $x^2 \circ 2 = 2 \circ 0 + a$, имеет решение, где $b \circ c = \frac{c+bc-b}{b+1}$.

▷ 6. Остаток от деления натурального числа n на 14 равен 11, остаток от деления n на 16 равен 3. Чему равен остаток от деления n на 28?

▷ 7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} |4 - x \cdot y| = x^2 + 6; \\ 4y - y^2 - 2 = (2x + y)^2. \end{cases}$$

▷ 8. Найти наибольшее из лежащих на отрезке $[0, 1000\pi]$ решений уравнения:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{10} - \cos \frac{x}{7} = -1.$$

▷ 9. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости заданы две параболы следующими уравнениями:

$$y = -2x^2 - 4,75x - 5,75; y = x^2 - 4,75x + 6,5.$$

Найти минимальное значение расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит первой параболе, а другая - второй параболе.

▷ 10. Решите уравнение $\frac{1+x^5}{(1+x)^5} = 781$.