

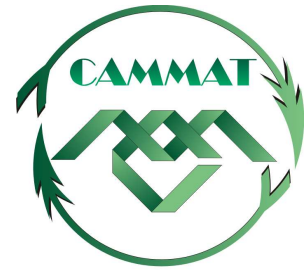
XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

11 класс



▷ 1. Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015. Если возможно, укажите наименьшее такое число.

▷ 2. С помощью любых математических действий и минимального количества единиц представьте число 2015.

▷ 3. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что  $f(x + g(y)) = 20x + y + 15$ . Сколько существует натуральных пар  $(x, y)$ , таких, что  $g(x + f(y)) + g(y + f(x)) \leq 10$ ?

▷ 4. По крайней мере три из заданных четырех точек, являющихся серединами сторон некоторого четырехугольника, находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

▷ 5. Заданы две последовательности  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}$ ,  $a_0 = \frac{1}{2}$ ; и  $b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n + 2$ ,  $b_0 = 4$ . Доказать, что для всех натуральных  $n$  справедливо соотношение

$$a_n b_n = 2b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

▷ 6. Сколько существует различных несократимых дробей  $a$  со знаменателем 2015, при которых уравнение имеет решение

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x = \pi^3 a$$

▷ 7. Каждая из 33 прямых разбивает правильный восьмиугольник на два шестиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере пять из этих прямых проходят через одну точку.

▷ 8. В коробке лежит 2015 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в ней спичек. Из двух игроков проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выигрывает при правильной игре?

▷ 9. От каждой вершины единичного куба отпиливают на расстоянии  $h$  от каждой вершины, перпендикулярно диагонали куба, проходящей через эту вершину, треугольные пирамиды, так, что в полученный многогранник можно вписать шар. Какие значения может принимать объем этого многогранника?

▷ 10. Пусть  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{2015}$ . Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением  $S$ , если известно, что выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \dots + 2x_{2014}^2 + x_{2015}^2 + 2x_1 + 2014 \leq \\ \leq 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{2014}x_{2015}) + 2x_{2015}, \\ (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 2)^4 + (x_3 - 3)^4 + \dots + (x_{2015} - 2015)^4 = 32240. \end{cases}$$